

**VŠB – Technická univerzita Ostrava**

**Fakulta elektrotechniky a informatiky**

**Katedra kybernetiky a biomedicínského inženýrství**

## **Modelování a analýza spojitých a diskrétních populačních modelů**

## **Modeling and Analysis of Continuous and Discrete Population Models**

2013

Veronika Mucinová

## Zadání bakalářské práce

Student: **Veronika Mucinová**  
Studijní program: B2649 Elektrotechnika  
Studijní obor: 3901R039 Biomedicínský technik  
Téma: **Modelování a analýza spojitých a diskrétních populačních modelů**  
**Modeling and Analysis of Continuous and Discrete Population Models**

Zásady pro vypracování:

1. Seznámení se základními pojmy z oblasti modelování.
2. Seznámení se problematikou modelování populačních modelů.
3. Simulace jednotlivých spojitých a diskrétních populačních modelů ve zvoleném simulačním prostředí.
4. Analýza vybraných spojitých a diskrétních populačních modelů.
5. Zhodnocení, závěr.

Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] ECK, Vladimír a Miroslav RAZÍM . *Biokybernetika*. Učební texty ČVUT Praha, fakulta elektrotechniky. Praha : České vysoké učení technické, 1996.ISBN 80-01-01445-2.  
[2] HOLČÍK, Jiří. *Modelování a simulace biologických systémů*. Praha : České vysoké učení technické, 2006.ISBN 80-01-03470-4.  
[3] PAZOUREK, Jaroslav. *Simulace biologických systémů*. Praha: Grada Publishing, 1992. 284 s. ISBN 80-85623-13-7.  
[4] POTŮČEK, Jiří. *Metodologie modelování biologických systémů*. Vyd. 1. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. 191 s. ISBN 978-80-01-04412-4.  
[5] FARKAS, Miklós. *Dynamical Models in Biology*. San Diego, CA: Academic Press, c2001. 187 s. ISBN 978-0-12-249103-0.

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

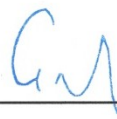
Vedoucí bakalářské práce: **Ing. Štěpán Ožana, Ph.D.**

Datum zadání: 16.11.2012

Datum odevzdání: 07.05.2013



doc. Ing. Jiří Koziorek, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

V Tuto práci se zabývám modelováním a analýzou spojitých a diskrétních populačních modelů. Pro vytvoření demonstrace populačních modelů jsem si zvolila programové prostředí Matlab a Scilab.

## **Klíčová slova**

Model, populace, Malthusův model, Kolmogorovův model, Leslieho model, modely konkurence a spolupráce, model Lotka Volterra.

## **Abstract**

The work deals with modeling and analysis of continuous and discrete population models. To create demonstration population models I chose the program Matlab and Scilab.

## **Keywords**

Model, population, Malthusian model, Kolmogorov model, Leslie model, models of competition and collaboration, Lotka Volterra model.

## Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci na téma Modelování a analýzy spojitých a diskrétních populačních modelů jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

V Českém Těšíně dne 6. 5. 2013

.....  
Kucimova V.  
podpis autora

## **Poděkování**

Děkuji vedoucímu bakalářské práce Ing. Štěpánu Ožanovi Ph.D. za účinnou metodickou, pedagogickou a odbornou pomoc a další cenné rady při zpracování mé bakalářské práce. Velmi si vážím času, který této práci věnoval.

## **Seznam zkratek**

HR	Hutchinsonové rovnice
PV	Pearlova – Verhulstova rovnice
RP	relativní porodnost
RÚ	relativní úmrtnost
t	čas (časové období)

## Obsah

1.	Úvod.....	1
2.	Přehled a rozdělení modelů jednodruhových populací .....	5
2.1	Spojité modely .....	5
2.1.1	Malthusův model.....	7
2.1.2	Logistický model.....	8
2.2	Modely jednodruhových populací se zpožděním.....	10
2.3	Diskrétní modely jednodruhových populací .....	12
2.3.1	Diskrétní Malthusova rovnice .....	12
2.3.2	Diskrétní logistická rovnice .....	12
2.4	Modely s věkovou strukturou – Leslieho model.....	13
3.	Přehled dvoudruhových populací.....	16
3.1	Základní matematický model Dravec a kořist.....	16
3.2	Modely dravec – kořist se zpožděním.....	17
3.3	Modely konkurence.....	19
3.4	Modely spolupráce.....	19
3.5	Kolmogorovův model .....	20
4.	Simulace a analýza jednotlivých modelů ve zvoleném simulačním prostředí .....	23
4.1	Malthusův model.....	24
4.2	Logistický model s proměnnými parametry.....	27
4.3	Logistický model se zpožděním.....	30
4.4	Lotka Volterra .....	33
4.5	Model konkurence.....	41
4.6	Model spolupráce.....	47
4.7	Diskrétní modely Malthusovy rovnice .....	52
4.8	Diskrétní modely Logistické rovnice .....	64
5.	Závěr a zhodnocení výsledků.....	69
6.	Použitá literatura .....	70
7.	Přílohy .....	71

# 1.Úvod

V dnešní době se s pojmem modelování můžeme setkat snad ve všech oblastech našeho života. Například v biologii, ekologii, matematice a dalších vědách. Modelování má oproti reálným experimentům několik výhod. Reálné experimenty jsou na rozdíl od modelování jak časově, tak hlavně finančně náročné. Výhoda modelování také spočívá v tom, že jednotlivé modely můžeme upravovat i v průběhu modelování. V této práci budeme vytvářet modely jednodruhových i dvoudruhových populací. Použijeme modely spojité i diskrétní. Vzhledem k tomu, že populačních modelů je velké množství, vybrali jsme v práci jen některé. Mezi ně patří: Malthusův model, logistický model se zpožděním a s proměnnými parametry, model Voltka Volterra, model konkurence a spolupráce a modely diskrétní. Modelování má několik metod, mezi ty zásadní patří metody analytické a numerické (výpočtem). V práci se budeme zabývat právě těmi numerickými. To znamená, že modely jsou popsány diferenciálními rovnicemi, které musíme pochopit, abychom byli schopni podle nich vytvořit bloková schémata daných modelů. To je jeden z cílů práce. Dalším cílem je následná analýza výsledků (grafických řešení). Pro modelování populací jsme zvolili dvě simulační prostředí – Matlab & Simulink a Scilab & Xcos. V závěru pak zhodnotíme výsledky a obě prostředí porovnáme.



## **Základní pojmy:**

**Populace** - je charakterizována jako soubor jedinců stejného (téhož) druhu, kteří se nacházejí ve stejném čase na určitém místě.

**Populační modely** se popisují různými způsoby, většinou se však jedná o matematický popis. Otázkou zůstává, který z těchto modelů popisů je ten nejdůležitější nebo ten pravý, který skutečně popisuje konkrétní situaci. Ani jeden z modelů není univerzální. Každý z nich popisuje určité vlastnosti dané populace.

**Model** - je zjednodušené zobrazení zkoumané skutečnosti (nějakého technického procesu nebo například fyzikálního objektu), které se realizuje k určitému cíli. Tato skutečnost se značí jako předmět modelování neboli originál. Matematické modely se využívají v různých odvětvích (matematice, fyzice, biologii, politologii, sociologii a dalších). Je nutné rozlišit jednotlivé typy modelů a určit jejich použití v této práci. Modely mají dvě základní rozdělení. Jsou modely spojité a diskrétní. Budeme pracovat s oběma modely, jelikož se zabýváme jednoruhovými i dvou druhovými populacemi. Modely se rozlišují také podle jejich chování v čase na spojité, diskrétní, deterministické, statické (v čase neměnné), dynamické (v čase se vyvíjející). Rozdělují se také podle své závislosti na okolí:

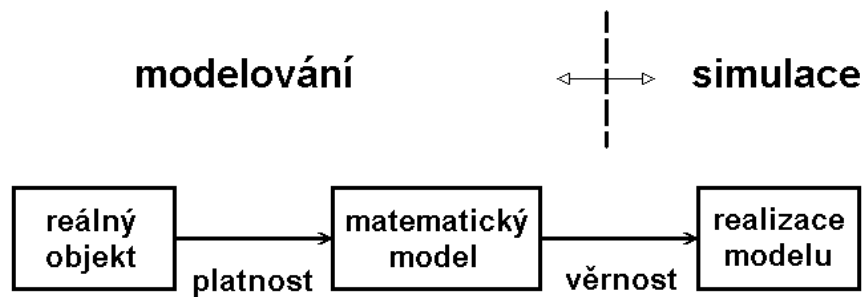
**Autonomní** – nezávislé na okolí

**Neautonomní** – explicitně (výslovně) závisí na nějaké vnější proměnné

**Modelováním** - nazýváme účelové zobrazování vyšetřovaných vlastností předmětu modelování neboli originálu pomocí vhodně zvolených vlastností modelu. Modelování je jednou z nejrozšířenějších pracovních metod.

Je, to jinými slovy také soubor aktivit vedoucích k vývoji matematického modelu, který reprezentuje strukturu a zároveň i chování reálného systému.

**Simulace** - jsou aktivity, které slouží k ověření správnosti modelů a získání nových poznatků o činnosti reálných systémů. [1],[2], [3]



**Obrázek 1** Blokové schéma modelování a simulace. Převzato z [1]

**Reálný objekt** - je zkoumaná část reálného světa. Může být buďto přirozený (květina, včelí roj apod.), umělý (počítač) nebo existující = zdroj dat o své existenci.

Existují dvě relace, které propojují reálný objekt a jeho model, a to jsou abstrakce a interpretace.

**Abstrakce** - znamená generalizaci (zobecnění). Ignorují se méně důležité rysy a vyzdvihují se ty nejdůležitější složky reálného systému.

**Interpretace** - znamená výklad (popis) vztahu mezi modelem a reálným systémem. Pokud nelze interpretovat parametry modelu pak nelze ani na reálném systému měřit jejich vlastnosti.

**Realizace modelu** - se provádí na zařízení, které je schopné zpracovat data (signály), pokud má k dispozici instrukce popisující model.

**Platnost modelu** – ukazuje, jak dobře model reprezentuje reálný objekt. Existuje několik stupňů platnosti modelu:

**Replikativní platnost** – model generuje to co reálný objekt až do teď

**Predikační platnost** – model generuje správná data dříve než reálný objekt

**Strukturální platnost** – model nejen vyjadřuje správná data, ale i vyjadřuje skutečný způsob generování dat v reálném objektu

**Věrnost simulace** – popisuje správnost s jakou realizační model (počítač) realizuje model.

[1], [4]

**Cíle modelování:**

Využití modelování nebo lépe řečeno systému je více. Často se například využívají pro diagnostické účely.

Tyto systémy se také dají využít pro výuku a vzdělání. Dají se jimi vysvětlit různě složité činnosti systémů, systémy se dají demonstrovat a můžou se i testovat hypotézy.

Pomocí systémů se také dají lépe a přesněji formulovat problémy, orientovat se ve složitých vztazích. Naučit se oddělovat nepodstatné od podstatného. Snáze tak zjednodušíme pozorovanou věc (fakt).

Pro přesné dotvoření a využití modelu je třeba pochopit problém, kterým se zabýváme, mít předem stanovený cíl, ke kterému se chceme dopracovat, a hlavně se musí použít kvalitní data, která se budou zpracovávat.

U modelování biologických systémů se rozlišují tři systémy. U těchto systémů se musíme zaměřit na jednotlivé modely. Jestli jsou založeny na zkušenostech teoretických, na experimentálním zkoumání nebo na struktuře (ta někdy neodpovídá struktuře reálného systému). [1], [4]

## 2. Přehled a rozdělení modelů jednodruhových populací

Modely jedno druhových populací jsou založeny na deterministickém chování populace. Stav populace je pak charakterizován velikostí populace. Stav populace může být vyjádřen třeba počtem jedinců pozorovaného druhu, kteří se vyskytují na pozorovaném území.

Spojité způsob popisu modelu patří mezi základní rozdělení. Spojitý způsob popisuje chování modelu v určitém časovém období a také diskrétní způsob popisu modelu, který počítá s diskrétními vzorky. Velká většina rovnic modelů růstu populace může být jak spojitou reprezentací času tak i diskrétní při splnění určitých podmínek. [1]

### 2.1 Spojité modely

V nejjednodušších spojitých modelech jednodruhových populací je populace vyjádřena svou velikostí (hustota populace, počet jedinců a další...).

**Populační dynamika** = změna hustoty populace v čase

Základní vztah charakterizující dynamiku dané populace:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d + \Delta x_m \quad (1)$$

, kde  $\Delta x_b$  znamená přírůstek za dobu  $\Delta t$  způsobený porodností,  $\Delta x_d$  úbytek způsobený úmrtností a  $\Delta x_m$  udává změnu vyvolanou migrací.

Zjednodušeně:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d \quad (2)$$

Je-li  $\Delta x_b$  počet jedinců, kteří se narodili za dobu  $\Delta t$ , pak platí:

$$\Delta x_b = B(x, t) \cdot \Delta t \quad (3)$$

$B(x, t)$  je porodnost, tzn. počet jedinců, kteří se narodí za časovou jednotku.

Podobně je to u počtu jedinců, kteří zemřeli za dobu  $\Delta t$ , kde  $D(x, t)$  je úmrtnost. Neboli počet jedinců, kteří za časovou jednotku zemřou. [1], [2]

$$\Delta x_d = D(x, t) \cdot \Delta t \quad (4)$$

Získáváme relativní parametry, RP tj. **relativní porodnost**:

$$b(x, t) = B(x, t) / x(t) \text{ a RÚ tj. relativní úmrtnost: } d(x, t) = D(x, t) / x(t) \quad (5)$$

Po dosazení do původní rovnice získáváme:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + (b(x, t) - d(x, t)) \cdot x(t) \cdot \Delta t \quad (6)$$

Po dalších úpravách:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \gamma(x, t) \cdot x(t) \quad (7)$$

, „kde  $\gamma(x, t) = b(x, t) - d(x, t)$  je obecná funkce vyjadřující základní dynamické charakteristiky daného populačního modelu.“ [1]

V limitním případě, kdy  $\Delta t \rightarrow 0$ , můžeme psát

$$x'(t) = \gamma(x, t) \cdot x(t) \quad (8)$$

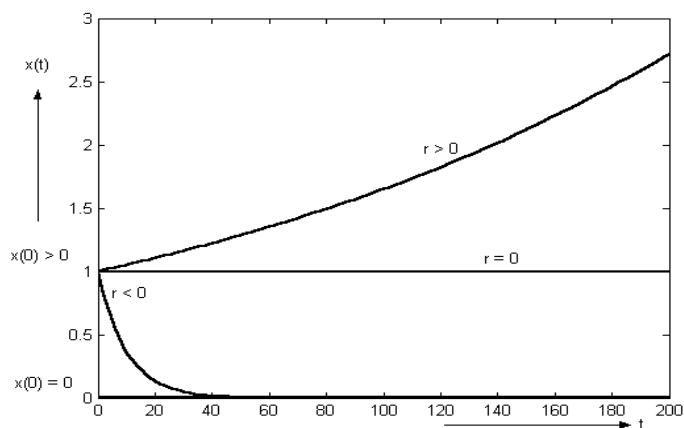
### **Popis hustoty populace jako spojitě funkce:**

Populace  $x(t)$  je natolik velká, že není třeba počítat s jednotlivci (kvantovací podmínka);

„Generace v populaci  $x(t)$  se překrývají, resp. všechny jedinci v populaci jsou identičtí (neexistuje věkové rozlišení), tj. populace je homogenní z hlediska jedinců v produkčním věku (vzorkovací podmínka) - zatímco populace bakterií, příp. vyšších živočichů (obratlovců) tuto podmínku zpravidla splňují, u populací hmyzu nebo např. jednoletých rostlin nastávají problémy.“ [1]

## 2.1.1 Malthusův model

Malthusův model je nejjednodušší varianta spojitého modelu růstu populace živých organismů, který se používá při modelování malé populace v kratším časovém období.



**Obrázek 2** Obecný graf Malthusova modelu. Převzato z [1]

Nejjednodušší varianta spojitého modelu.

$$\gamma(x, t) = b(x, t) - d(x, t) = r \quad (9)$$

Když budeme předpokládat, že rozdíl úbytku a přírůstku v populaci je v čase stálý. Z hlediska prostředí, v němž populace žije, to znamená, že vliv tohoto prostředí se v čase nemění.

$$\text{Malthusova rovnice } x'(t) = r \cdot x(t). \quad (10)$$

**Řešení:**

$x(t) = x(0) \cdot \exp(rt)$ , kde  $x(0)$  je počáteční podmínka.

$x(0) > 0$  a  $r > 0$  populace exponenciálně roste (prosperuje)

$x(0) > 0$  a  $r < 0$  populace exponenciálně klesá (vymírá)

$x(0) > 0$  a  $r = 0$  populace se nemění (je konstantní)

rovnovážný stav  $x'(t) = 0$  pro  $t > 0$  (muže být stabilní nebo nestabilní).

[1], [2], [6]

## 2.1.2 Logistický model

$$\gamma(x, t) = K - x(t) \quad K > 0 \text{ je kapacita životního prostředí sledované populace.} \quad (11)$$

$$x'(t) = (K - x(t)) \cdot x(t) = K \cdot x(t) - x^2(t) \quad (12)$$

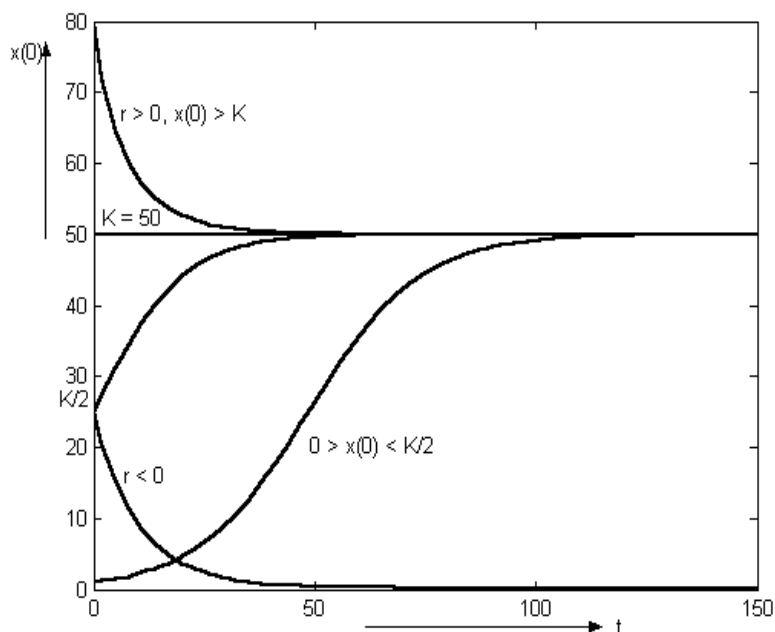
$$x'(t) = C \cdot (K - x(t)) \cdot x(t) = C \cdot K \cdot (1 - x(t)/K) \cdot x(t) \quad (13)$$

$$x'(t) = \rho \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \cdot x(t) \quad \rho = C \cdot K \quad (14)$$

Tuto rovnici nazýváme logistická případně PV rovnice (Pearlova – Verhulstova rovnice, Belgický matematik). Při využití tohoto modelu se uplatňují faktory prostředí, ve kterém daná populace žije, tím dochází ke zpomalování růstu populace. Může dojít k zastavení růstu, nebo případnému vymírání dané populace. [1]

Řešení:

$$x(t) = \frac{K \cdot x(0) \cdot \exp(\rho t)}{K + x(0) \cdot \exp(\rho t) - 1} \quad (15)$$



**Obrázek 3** Obecný graf Logistického modelu. Převzato z [1]

### Logistický model s proměnnými parametry:

Když zavedeme do modelového popisu populace proměnný vliv prostředí, v němž populace žije, lze tuto skutečnost vyjádřit časovou závislostí parametrů modelu. V případě logistické rovnice to jsou parametry  $\rho$  a  $K$  a rovnice nabývá tvaru:

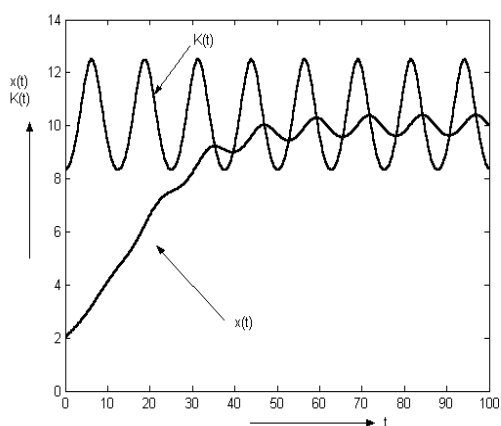
$$x'(t) = \rho(t) \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K(t)}\right) \cdot x(t) \quad (16)$$

Pro každou počáteční podmínku  $x(0) \geq 0$  má jedno řešení ve tvaru

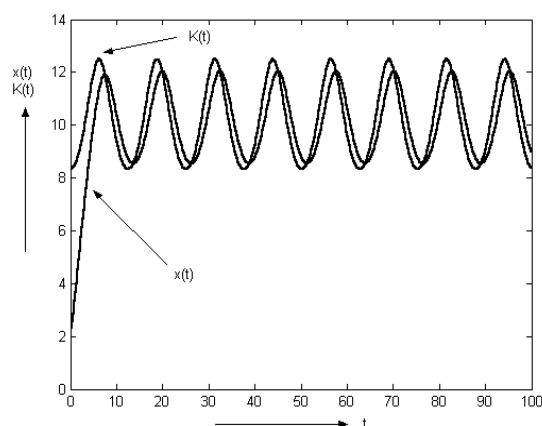
$$x(t) = \frac{x(0) \cdot \exp \int_0^t \rho(s) ds}{1 + x(0) \cdot \int_0^t \frac{\rho(s)}{K(s)} \cdot \exp \int_0^t \rho(u) du ds} \quad (17)$$

$$\rho(t) = \text{konst.} \quad \text{a} \quad K(t) = 1/(1 + \varepsilon \cdot \cos wt) \quad \text{pro } \varepsilon \in (0,1)$$

[1]



Obrázek 5  $\rho=0,1$ . Převzato z [1]



Obrázek 4  $\rho=0,9$ . Převzato z [1]



### Logistický model s odchylem

$$x'(t) = \rho \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \cdot x(t) - C \quad (18)$$

Rovnovážné stavy soustavy jsou dány kvadratickou rovnicí:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{K} \cdot x^2 - \rho x + C &= 0 \\ x_{1,2}^* &= \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 4\rho C / K}}{2\rho / K} = \frac{\sqrt{K}}{2\rho} \cdot (\rho \cdot \sqrt{K} \pm \sqrt{K\rho^2 - 4\rho C}) \end{aligned} \quad (19)$$

„Podle počtu reálných kořenů nastávají následující varianty:

Dva různé reálné kořeny, což nastává právě tehdy, když  $c < K \cdot \rho / 4$  - v tom případě jsou oba kořeny kladné;

Jeden dvojnásobný kladný reálný kořen pro  $c = K \cdot \rho / 4$ , tj.  $x_{1,2}^* = K/2$ ;

A žádný reálný kořen pro  $c > K \cdot \rho / 4$ . „ [1]

Derivace pravé strany definiční rovnice podle  $x$  je:

$$f'(x) = \rho - \frac{2\rho}{K} \cdot x \quad (20)$$

[1]

## 2.2 Modely jednodruhových populací se zpožděním

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)) \quad (21)$$

, kde  $\tau$  je střední doba dosažení reprodukční schopnosti.

Když použijeme tento postup pro logistickou rovnici, dostáváme rovnici Hutchinsonové, definovanou.

$$x'(t) = \rho \cdot x(t) \cdot \left[1 - \frac{x(t - \tau)}{K}\right] \quad (22)$$

, kde  $\rho$ ,  $K > 0$  a  $\tau > 0$  jsou parametry modelu. Rovnice H (Hutchinsonové) udává, že regulační vliv na okamžitý stav populace má spíše stav populace, který je v čase  $t - \tau$  než v čase  $t$  (rovnice je zjednodušením, které postihuje pouze průměrné vlastnosti analyzované populace). [1]

### Rovnice Hutchinsonové popisuje následující situaci:

„Předpokládáme – li, že populace žije v prostředí s dostatečným zdrojem potravy, pak se zejména při nízkém stavu rozmnožuje relativně rychle, přibližně podle exponenciálního zákona. Pokud se ale stav populace zvýší, začne se projevovat vnitrodruhová konkurence, zdroje potravy jsou nedostačující a následkem toho se omezí porodnost. Navíc když dospějí jedinci, narození v době s nízkou populační hustotou, přemnožení způsobí rychlý pokles populační hustoty a celý proces se opakuje.“ [1]

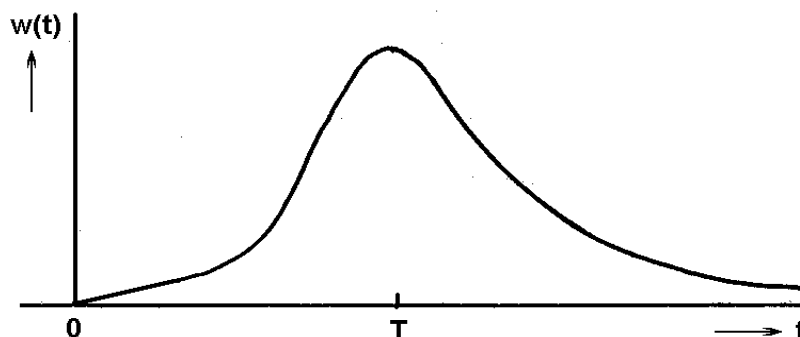
Zobecněním rovnice H., které postihne reálnější vlastnosti populace, je např. integro-diferenciální rovnice konvolučního typu definovaná

$$x'(t) = \rho \cdot x(t) \cdot \left[ 1 - \frac{1}{K} \int_{t_1}^{t_2} w(s)x(t-s)ds \right] \quad (23)$$

, kde všechny koeficienty jsou kladné,  $w(t)$  je váhová funkce, která udává, jak velký důraz by měl být kladen na velikost populace v dřívějším čase, chceme-li stanovit vliv na současnou populaci. V čase  $t = s$  má relativní počet  $w(s)$  jedinců věk  $s$ . Rozdíl  $t_2 - t_1$  udává maximální možný věk jedinců v populaci, a proto platí:

$$\int_{t_1}^{t_2} w(s)ds = 1 \quad (24)$$

„Funkce  $w(s)$  je nezáporná a spojitá (pokud popisuje spojitě rozmnožování). Při sezónním rozmnožování je váhová funkce diskrétní a rovnice Hutchinsonové je speciálním případem. Diskrétní váhová funkce  $w$  má v tomto případě pouze jeden vzorek. „ [1]



Obrázek 6 Řešení rovnice Hutchinsonové. Přavzato z [1]

Charakter řešení rovnice Hutchinsonové je zcela odlišný od řešení logistické rovnice - analytické řešení neexistuje, řešení je třeba obecně hledat numericky.

Dá se očekávat, že řešení pro velké hodnoty bude zpoždění nestabilní a proto, přesto, že je rovnice Hutchinsonové rovnici 1. řádu, očekáváme možnost vzniku oscilujícího řešení. [1]

## 2.3 Diskrétní modely jednoruhových populací

Generace, které žijí v populaci se navzájem nepřekrývají,

$$x_{n+T} = f(x_n) \quad (25)$$

Počet jedinců v následující generaci je určen počtem jedinců v generaci předcházející, intervaly T mohou být různě dlouhé - u primitivních organismů bývá být tato doba krátká, u vyšších organismů to bývá většinou jeden rok.

často normalizace, tj.  $T = 1$ ; obecněji:

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k-1}), \text{ pro } n \geq k \quad (26)$$

[1]

### 2.3.1 Diskrétní Malthusova rovnice

Jako základní se uvádí rovnice:

$$x_{n+1} = R \cdot x_n \quad (27)$$

, kde R je podobně jako u spojitých modelů rychlost dynamiky (rozmnožování) populace, která může být dána například počtem potomků na jednoho z rodičů. [1]

### 2.3.2 Diskrétní logistická rovnice

Základní varianta:

$$X_{n+1} = P \cdot X_n \cdot \left(1 - \frac{X_n}{K}\right), \quad P > 0, K > 0 \quad (28)$$

U takového modelu je chování omezeno pro parametr  $P > 0$  a činnost modelu je navíc omezena jen na  $x_n \leq K$ , protože pro  $x_n > K$  je  $x_{n+1} < 0$ . Mnohem reálnější je model popsáný rovnicí:

$$X_{n+1} = X_n \cdot \exp\left(P \cdot \left(1 - \frac{X_n}{K}\right)\right), \quad P > 0, K > 0 \quad (29)$$

Diskrétní modely provádí výpočet v diskretních krocích, což zavádí do výpočtu zpoždění  $\Rightarrow$  heuristické srovnání činnosti diskretních modelů se spojitými modely se zpožděním  $\Rightarrow$  oscilační chování i u systémů 1. řádu  $\Rightarrow$  složité chování s nepravidelnými průběhy – nelineární dynamika, respektive deterministický chaos. [1], [6]

### Diskrétní modely 1D populací se zpožděním:

Pokud budeme uvažovat zpoždění  $T$  generací, můžeme obecně psát definiční rovnici ve tvaru:

$$x_{n+1} = f(x_{n-T}) \quad (30)$$

Lineární analýza stability - předpokládejme, že máme model definovaný diferenční rovnicí se zpožděním podle následujícího vztahu:

$$X_{n+1} = X_n \cdot \exp\left(P \cdot \left(1 - \frac{X_{n-1}}{K}\right)\right) \quad (31)$$

Pro zjednodušení se uvádí vztah:

$$u_{n+1} = u_n \cdot \exp[P \cdot (1 - u_{n-1})], \quad \text{kde } u_n = x_n/K \quad (32)$$

[1]

## 2.4 Modely s věkovou strukturou – Leslieho model

Parametry modelu, které určují chování modelu, jsou:

**Relativní porodnost**  $b_i$  - v každé věkové skupině  $x_i$  za časovou jednotku (je dána průměrným počtem potomků jedné samice ve věkové kategorii  $x_i$ );

**Relativní úmrtnost**  $d_i$  v každé věkové skupině (dána průměrným počtem úmrtí v dané věkové kategorii  $x_i$  vztaženým k počtu jedinců v této kategorii); (pravděpodobnost) přežití  $p_i = 1 - d_i$ .

**Počet jedinců v první věkové skupině  $x_1$  určuje počet potomků všech věkových skupin:**

v čase  $t_1$  je  $x_1(t_1) = b_1 \cdot x_1(t_0) + b_2 \cdot x_2(t_0) + b_3 \cdot x_3(t_0) + \dots + b_n \cdot x_n(t_0)$

v čase  $t_2$  je  $x_1(t_2) = b_1 \cdot x_1(t_1) + b_2 \cdot x_2(t_1) + b_3 \cdot x_3(t_1) + \dots + b_n \cdot x_n(t_1)$

v čase  $t_{k+1}$  je  $x_1(t_{k+1}) = b_1 \cdot x_1(t_k) + b_2 \cdot x_2(t_k) + b_3 \cdot x_3(t_k) + \dots + b_n \cdot x_n(t_k)$ , tedy:

$$x_1(t_{k+1}) = \sum_{i=1}^n b_i x_i(t_k) \quad (33)$$

**Počet jedinců ve druhé věkové skupině je:**

$$X_2(t_{k+1}) = p \cdot x_1(t_k), \quad (34)$$

obecně v  $i$ -té věkové skupině ( $2 \leq i \leq n$ )

$$x_i(t_{k+1}) = p_{i-1} \cdot x_{i-1}(t_k). \quad (35)$$

**Definiční rovnice mohou být vyjádřeny v maticové formě:**

$$x_{k+1} = A \cdot x_k \quad (36)$$

, kde  $X_k$  je vektor věkového rozložení populace v čase  $k$  a  $A$  je přechodová matice. Podrobněji můžeme tuto rovnici přepsat:

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n \\ p_0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & & p_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{0,k} \\ x_{1,k} \\ x_{2,k} \\ x_{3,k} \\ \vdots \\ x_{n,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,k+1} = \sum b_i \cdot x_{i,k} \\ x_{1,k+1} = p_0 \cdot x_{0,k} \\ x_{2,k+1} = p_1 \cdot x_{1,k} \\ x_{3,k+1} = p_2 \cdot x_{2,k} \\ \vdots \\ x_{n,k+1} = p_{n-1} \cdot x_{n-1,k} \end{bmatrix} \quad (37)$$

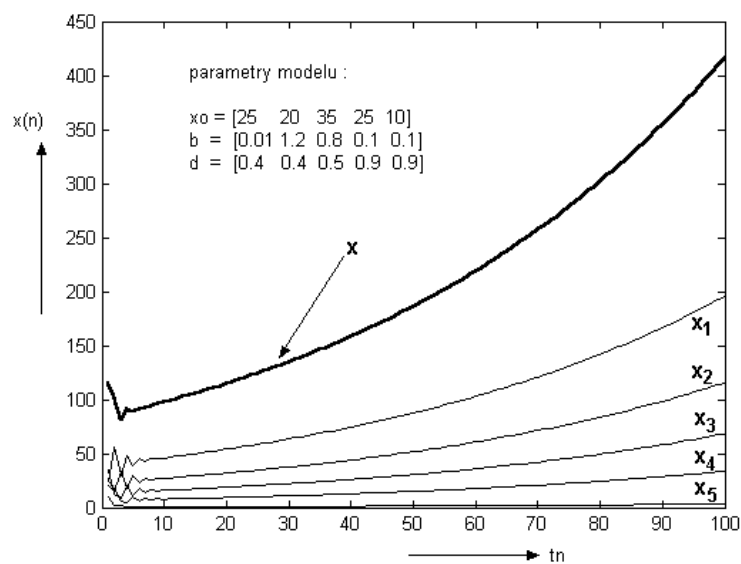
„Každý sloupec matice  $A$  určuje osud organismu v daném specifickém stádiu (skupině). Hodnota elementu v  $i$ -tém sloupci a  $j$ -tém řádku udává kolik jedinců ve  $j$ -té skupině vzniklo díky jednomu jedinci v  $i$ -té skupině.“ [1]

Tak jako u každého diskrétního modelu lze určit stav modelu v čase  $t$  pomocí vztahu

$$X_t = A_t \cdot X_0. \quad (38)$$

**Leslieho model má dva základní rysy:**

- po několika tlumených kmitech na počátku simulace následuje exponenciální růst celkového počtu jedinců v populaci;
- relativní věkové rozložení konverguje (přibližuje se) ke stabilnímu stavu. [1], [2]



**Obrázek 7** Obecný graf Leslieho modelu. Převzato z [1]

### 3. Přehled dvoudruhových populací

Základní typy vzájemné interakce dvou druhů:

**Mutualismus** – obě populace mají ze vzájemného soužití prospěch (tzv. žijí v symbióze).

**Dravec a kořist** - jedna populace prospívá, druhá chřadne (kromě základního typu interakce, který dal tomuto typu jméno lze tohoto modelu použít i pro následující typy vzájemného působení (parazit x hostitel, býložravec x rostlina, zaměstnavatel x zaměstnanec, a další).

**Konkurenti** – obě populace vzájemným kontaktem trpí.

**Komensalismus** – jeden druh se živí potravou druhého jedince. (tzv. neškodné příživnictví).

**Neutralismus** – oba zúčastněné druhy se nepodílí na vzájemné látkové výměně.

**Amensalismus.** - nebo též antibióza, allelopatie je mezidruhový vztah. V tomto vztahu jeden druh (inhibitor) produkuje látky toxické pro jiný druh (amensála), ten na inhibitora však nijak nepůsobí. [1], [9]

#### 3.1 Základní matematický model Dravec a kořist

$$\Delta x_n = k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t \quad (39)$$

$\Delta x_n$  - je počet kořistí, které se narodily v daném časovém intervalu  $\langle t, \Delta t \rangle$ . Můžeme předpokládat, že tato hodnota je úměrná počtu kořistí  $x(t)$  v čase  $t$ , délce časového intervalu  $\Delta t$  a relativní porodnosti  $k_1$  kořistí.

„To znamená, že přírůstek do populace kořisti bude respektovat Malthusův model populační dynamiky.

Dále,  $\Delta x_m$  je počet kořistí ulovených dravci  $y(t)$  během časového intervalu  $\langle t, \Delta t \rangle$ , by měl být úměrný počtu vzájemných setkání jedinců obou druhů a délce časového intervalu  $\Delta t$ . „ [1]

Pro tento případ platí rovnice:

$$\Delta x_m = k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t \quad (40)$$

Konstanta  $k_2$  vyjadřuje pravděpodobnost, že při setkání dravce a kořisti skončí zahubením kořisti. Tato konstanta může také udávat spotřebu, neboli potřebu dravce.

Celkovou změnu stavu populace kořistí za dobu  $\Delta t$  lze tedy udat rozdílem:

$$\Delta x_n - \Delta x_m = k_1 \cdot x(t) \cdot \Delta t - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t = [k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t)] \cdot \Delta t \quad (41)$$

Za předpokladu, že počet narozených dravců  $\Delta y_n$  během doby  $\Delta t$  je úměrný počtu vzájemných setkání dravců a kořisti a délce časového intervalu  $\Delta t$ .

$$\Delta y_n = k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) \cdot \Delta t, \quad (42)$$

$K_3$  je konstanta, která udává (vyjadřuje) účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.

Úbytek v populaci dravců  $\Delta y_m$  je opět dán Malthusovým modelem. To znamená, že je úměrný stavu populace dravců  $y(t)$  v čase  $t$  a délce časového intervalu  $\Delta t$ .

$$\Delta y_m = k_4 \cdot y(t) \cdot \Delta t, \quad (43)$$

, kde  $k_4$  reprezentuje relativní úmrtnost dravců. Za těchto předpokladů, je celková změna stavu populace dravců dána vztahem:

$$\Delta y_n - \Delta y_m = [k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_4 \cdot y(t)] \cdot \Delta t \quad (44)$$

V limitním případě, kdy může dojít k  $\Delta t=0$  platí:

$$x'(t) = k_1 \cdot x(t) - k_2 \cdot x(t) \cdot y(t) \quad (45)$$

$$y'(t) = k_2 \cdot k_3 \cdot x(t) \cdot y(t) - k_4 \cdot y(t), \text{ Rovnice Lottka Volterry} \quad (46)$$

„Nejsou-li přítomni v populaci dravci ( $y(t)=0$ ), pak populace kořisti neohraničeně roste podle Malthusova předpisu. Když není přítomna kořist, dravci exponenciálně hynou. Systém 2. řádu – oscilační charakter dynamiky proměnných  $x(t)$  a  $y(t)$ .“ [1]

### 3.2 Modely dravec – kořist se zpožděním

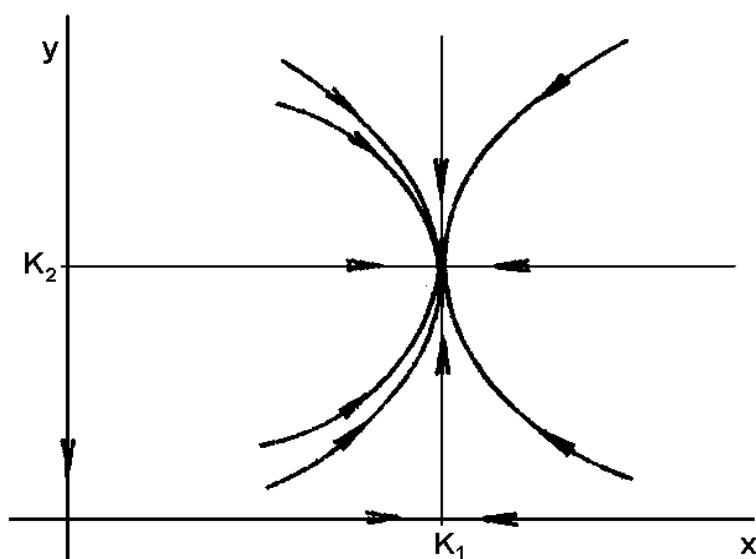
$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho_1 \cdot \left(1 - \frac{x(t)}{K_1}\right) \cdot x(t), \\ y'(t) &= \rho_2 \cdot \left(\frac{x(t)}{K_1} - \frac{y(t)}{K_2}\right) \cdot y(t) \end{aligned} \quad (47)$$

„Daná soustava udává, že populace kořisti se vyvíjí podle logistické rovnice, která omezuje faktor růstu populace, který je dán pouze vnitrodruhovou konkurencí, nikoliv působením dravců. To může nastat za předpokladu, že  $x(t) \gg y(t)$ .“ [1]



V další rovnici je přírůstek populace dravců definován vztahem  $\rho_2 \cdot x(t) \cdot y(t) / K_1$ , kde je vliv vzájemného působení a přeměny biomasy vyjádřen poměrem parametrů  $\rho_2 / K_1$ , když  $K_1$  je současně kapacitou prostředí kořisti a úbytek (úmrtnost) populace, dána vztahem  $\rho_2 \cdot y(t) / K_2$ , kde  $K_2$  je současně kapacitou prostředí dravce.

„Soustava má tři rovnovážné stavy -  $(0; 0)$ ,  $(K_1; 0)$  a  $(K_1; K_2)$ , z nichž kladný rovnovážný stav  $(K_1; K_2)$  je tzv.  $\omega$ -limitní množinou, do které směřuje jakékoliv řešení začínající v libovolném bodě části stavového prostoru, pro kterou platí, že  $x(t) \geq 0$  a  $y(t) \geq 0$ . Systém v uvedeném tvaru nemá oscilační chování, ale podobně jako v jednorozměrném případě je lze vyvolat zavedením zpoždění.“ [1]



**Obrázek 8** Model dravec – kořist se zpožděním. Převzato z [1]

Při zavedení zpoždění se mění tvar rovnice.

$$\begin{aligned} x'(t) &= \rho_1 \cdot \left( 1 - \frac{x(t - \tau_1)}{K_1} \right) \cdot x(t), \\ y'(t) &= \rho_2 \cdot \left( \frac{x(t)}{K_1} - \frac{y(t - \tau_2)}{K_2} \right) \cdot y(t) \end{aligned} \quad (48)$$

Vliv kořisti na populaci dravců je podle uvedeného modelu okamžitý (je zanedbána doba vývoje plodu), vnitro-konkurenční vliv na komunitu dravců uplatňuje spíše stav její zpožděné populace.

Vliv dravců na populaci kořisti je zanedbatelný. U modelů jednodruhových populací se zpožděním byla uvedena kritická podmínka pro logistickou rovnici popisující dynamiku jedno druhové populace umožňující vznik oscilací -  $\rho \cdot \tau > \pi/2$ . Stejná situace nastává i v případě první rovnice ve výše uvedené soustavě rovnic a oscilace stavu populace kořisti vzhledem k vazbě

mezi oběma populacemi kmitavý průběh stavu kořisti zprostředkovaně vyvolávají oscilace i u predátorské populace. [1], [2]

### 3.3 Modely konkurence

Konkurence znamená, že obě populace musí soutěžit (bojovat) o zdroje potravy a to záporně ovlivňuje stav obou těchto populací.

Jednoduchý model konkurenčního soužití populací dvou druhů  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  s logistickým omezením růstu. Jeho zápis vypadá takto:

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= \rho_1 \cdot x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} - b_{12} \frac{x_2(t)}{K_1}\right) \\x_2'(t) &= \rho_2 \cdot x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{K_2} - b_{21} \frac{x_1(t)}{K_2}\right)\end{aligned}\tag{49}$$

, kde  $\rho_1$ ,  $K_1$ ,  $\rho_2$ ,  $K_2$ ,  $b_{12}$  i  $b_{21}$  jsou kladné konstanty, kde podobně jako v předešlých modelech,  $\rho$  jsou lineární rychlosti rozmnožování populací,  $K$  představují kapacity prostředí a konstanty  $b_{12}$  a  $b_{21}$  reprezentují vzájemný konkurenční vliv obou populací, tj. populace  $x_2(t)$  na  $x_1(t)$  a naopak  $x_1(t)$  na  $x_2(t)$ , obecně je  $b_{12} \neq b_{21}$ . [1]

### 3.4 Modely spolupráce

Základním modelem, který popisuje mutualismus je podobný model jako klasický model Lotky - Volterry, definovaný rovnicemi

$$\begin{aligned}x_1'(t) &= k_{11} \cdot x_1(t) + k_{12}x_2(t)x_1(t) \\x_2'(t) &= k_{21} \cdot x_2(t) + k_{22}x_1(t)x_2(t)\end{aligned}\tag{50}$$

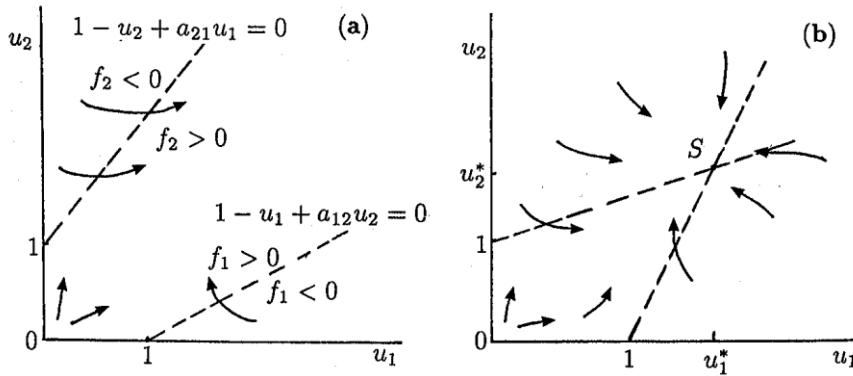
, kde  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{22} > 0$ .

Protože z uvedené definice platí, že  $x_1'(t) > 0$  a  $x_2'(t) > 0$ , znamená to, že obě populace neohrazeně rostou, což příliš neodpovídá reálné situaci.

Nejjednodušší variantou modelu, který vyjadřuje vzájemně prospěšnou interakci dvou různých populací, která splňuje výše uvedené požadavky, je model zahrnující vnitrodruhovou konkurenci podle logistické rovnice. Tedy platí:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= \rho_1 \cdot x_1(t) \cdot \left(1 - \frac{x_1(t)}{K_1} - b_{12} \frac{x_2(t)}{K_1}\right) \\
x_2'(t) &= \rho_2 \cdot x_2(t) \cdot \left(1 - \frac{x_2(t)}{K_2} - b_{21} \frac{x_1(t)}{K_2}\right)
\end{aligned} \tag{51}$$

, což jsou rovnice velice podobné vztahům pro modelování konkurenčních vztahů - liší se pouze znaménky před třetím, posledním členem v závorkách. I použité konstanty mají též význam. [1]



Obrázek 9 Graf modelu spolupráce. Převzato z [1]

### 3.5 Kolmogorovův model

Rovnice dynamiky kořisti v obecném tvaru:

$$x'(t) = A(x) \cdot x(t) - V(x) \cdot y(t) \tag{52}$$

„A(x) udává relativní rychlost rozmnožování populace kořisti v závislosti na jejím stavu. Při malých hodnotách se rodí více jedinců, než umírá, a tedy funkce A(x) by měla nabývat kladných hodnot. S rostoucím počtem se životní podmínky populace zhoršují a podíl nově narozených jedinců klesá až teoreticky pro  $x \rightarrow \infty$  je úmrtnost větší než porodnost a funkce A(x) je záporná.“ [1]

Zavedením vnitrodruhové konkurence, v již uvedených jednodruhových modelech s pomocí kapacity prostředí (ta omezuje růst populace kořisti). Je to jeden z nejpoužívanějších způsobů.

$$A(x) = \rho_1 \cdot \frac{x(t)}{K} \tag{53}$$

Pokud je funkce A(x) definovaná takto, znamená to, že se při nepřítomnosti dravce vyvíjí populace kořisti podle logistické rovnice. [1]

„ $V(x)$  je funkce, tzv. trofická funkce dravce, která určuje množství kořisti, které dravec uloví za danou jednotku času v závislosti na stavu populace kořisti.

Při nízkém stavu kořist nejprve roste, až po dosažení stavu saturace (nasycení) zůstává na konstantní úrovni. Saturace pro velké hodnoty  $x(t)$  je známkou omezených schopností nebo nasycenosti dravců. „ [1]

Jedna z možností, jak může být trofická funkce realizována je dána vztahem:

$$V(x) = \frac{p \cdot x(t)}{c \cdot (a + x(t))} = \frac{C \cdot x(t)}{B + x(t)} \quad p, a, c > 0 \quad (54)$$

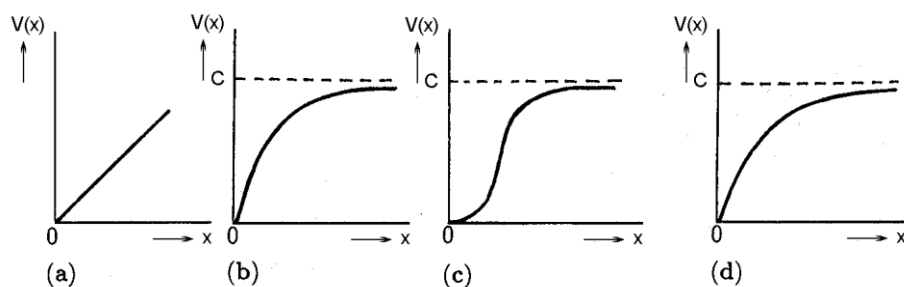
, kde  $p$  je maximální přírůstek dravce,  $a$  je tzv. konstanta Michaelise - Mentenové, která udává množství kořisti potřebné k tomu, aby se dravec mohl rozmnožovat rychlostí  $p/2$  a koeficient přeměny biomasy  $c \in (0; 1)$ , protože ne všechna biomasa kořisti se přemění na biomasu dravce.

Existují i další používané průběhy  $V(x)$  např:

$$V(x) = \frac{C \cdot x^2(t)}{B^2 + x^2(t)}$$

nebo

$$V(x) = \frac{C \cdot x(t) \cdot (1 - e^{-kx(t)})}{x(t)} \quad (55)$$



**Obrázek 10** Příklady průběhů  $V(x)$  odezev dravců na stav kořisti. Převzato z [1]

Rovnici dynamiky dravců zapisujeme zpravidla v obecném tvaru:

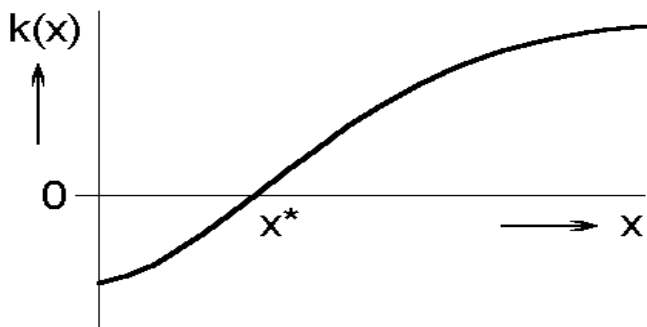
$$y'(t) = k(x) \cdot y(t) \quad (56)$$

, funkce  $k(x)$  udává celkový přírůstek populace dravce, který je záporný pro nízké stavy kořisti, která nestačí dravce uživit.

Za předpokladu, že se zvyšuje stav populace kořisti hodnoty funkce  $k(x)$  taktéž rostou, ale při dostatečně velkých hodnotách  $x(t)$  se opět může uplatnit vliv saturace. [1]

Funkce  $k(x)$  by proto měla splňovat následující požadavky:

$$k(0) < 0, \quad k'(x) > 0.$$



**Obrázek 11** Kolmogorovův model. Převzato z [1]

**Realizace funkce  $k(x)$  pak mohou být provedeny např. vztahem:**

$$k(x) = e \cdot V(x) - m \quad (57)$$

, kde funkce  $V(x)$  je definována podle některého z dříve uvedených vztahů. Oproti základnímu modelu Lotky - Volterry, ve kterém se množství potravy spotřebované dravcem neomezeně zvyšuje s růstem populace kořisti, respektují tyto modely existenci prahu nasycení dravce.

Jinou možností, jak vyjádřit dynamiku populace dravců je funkce  $k(x,y)$  definovaná:

$$k(x, y) = t \cdot \left( 1 - J \cdot \frac{y(t)}{x(t)} \right) \quad (58)$$

, kde  $J$  je zde množství kořisti, které je potřebné k tomu, aby přežil jeden dravec (populace se stavem  $x(t)$  proto nemůže uživit více než  $x(t)/J$  dravců). [1]

## 4. Simulace a analýza jednotlivých modelů ve zvoleném simulačním prostředí

V této práci se zabýváme modely jednoruhových a dvoudruhových populací. Populační modely jde popsat různými způsoby. Mezi hlavní metody patří metody analytické a numerické. My se tedy v práci zabýváme tím numerickým řešením. To je založeno na jedné nebo více diferenciálních rovnicích. Pomocí těchto rovnic lze sestavit jednotlivé modely. Jako vhodné prostředí jsme zvolili Matlab&Simulink a Scilab&Xcos. Výsledným řešením v obou programech je blokové schéma modelů a jejich grafy. Řešení je tedy grafické. Vzhledem k tomu, že jednotlivých modelů, je široká škála, zvolili jsme ke zpracování jen určité typy. Dá se říci, že ty nejpoužívanější a nejznámější. Ze spojitých i diskrétních modelů jak jednoruhových, tak samozřejmě dvoudruhových populací.

V Matlabu i Scilabu jsme použili bloky, které byly téměř shodné. Některé se lišily nastavením, tvarem nebo názvem. Funkce bloků byla však vždy stejná. Mezi hlavní použité bloky patří:

Gain – zesilovač, zesílí signál o zadanou hodnotu.

Scope – výstupní blok – „obrazovka“.

Add – blok sčítání a odčítání dvou nebo více vstupních signálů.

Integrator – blok, pomocí kterého se provádí integrace, integruje vstupní hodnoty v závislosti na čase.

Product – produkt, většinou značený jako „x“.

Constant – blok, pro konstantní hodnotu určitého prvku.

Clock – hodiny, výstup hodin odpovídá uplynulému simulačnímu času.

Function – funkce, blok kde zmůžeme zapsat jednotlivou funkci.

Manual Switch – je aktivní síťový prvek, který propojuje jednotlivé segmenty. Na výstupní svorku projde signál z jedné nebo dvou vstupních svorek. Přepneme ho dvojklikem.

Divide – blok dělení a násobení.

Delay – zpoždění, zaznamená vstupní signál a reprodukuje ho na výstupu s jistým zpožděním.

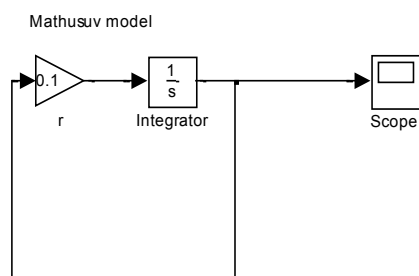
LOG – logaritmus

[8]

## 4.1 Malthusův model

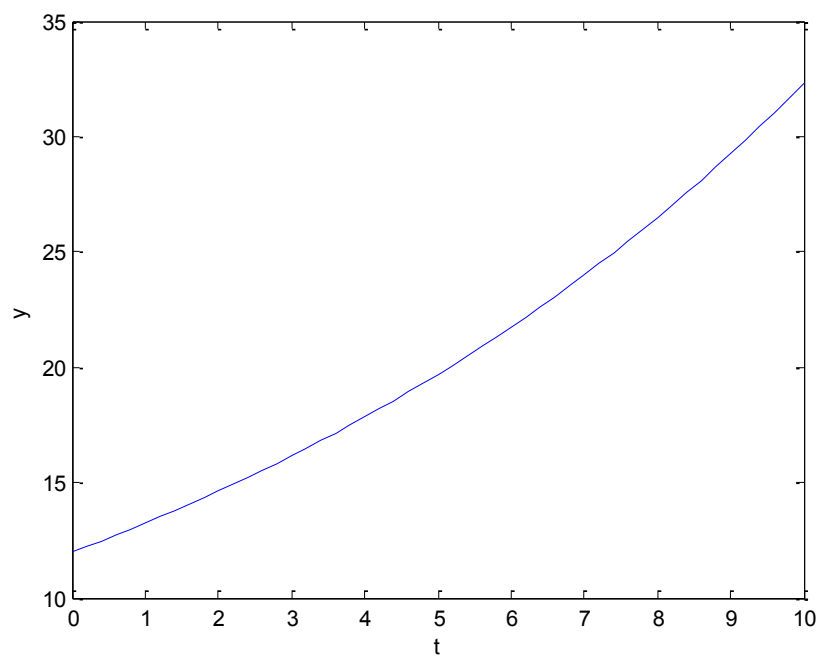
### Řešení modelu v MATLABU

#### 1) Blokové schéma



**Obrázek 12** Blokové schéma Malthusova modelu v Matlabu

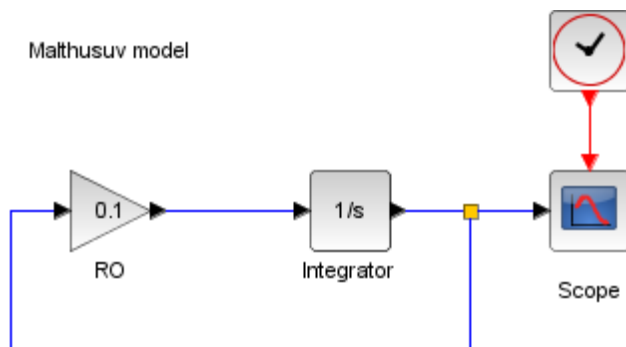
#### 2) Grafické řešení



**Obrázek 13** Grafické řešení z Matlabu

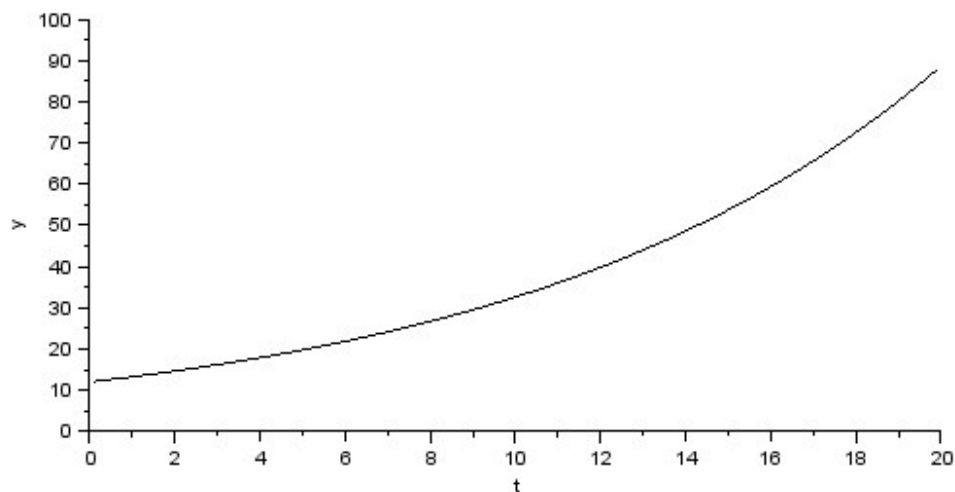
### Řešení modelu ve SCILABU:

#### 1) Blokové schéma



Obrázek 14 Blokové schéma Malthusova modelu ve Scilabu

#### 2) Grafické řešení



Obrázek 15 Grafické řešení ze Scilabu

### Analýza Malthusova modelu:

U tohoto modelu předpokládáme, že rozdíl úbytku a přírůstku v dané populaci je stálý. To znamená, že vliv prostředí na populaci se nemění. Proto je výsledným grafem rostoucí exponenciála, která, se však v určitém bodě zastaví, a to když populace vymře. Exponenciála je rostoucí, protože na Malthusův model, tedy model jednoruhové populace nemá prostředí skoro žádný vliv. Tento model je nejjednodušším modelem a také asi nejpoužívanějším.

Řešení je zde triviální. Exponenciála roste nad „maximální“ meze.

#### Řešení:

$x(t) = x(0) \cdot \exp(rt)$ , kde  $x(0)$  je počáteční podmínka.



$x(0) > 0$  a  $r > 0$  populace exponenciálně roste (prosperuje)

$x(0) > 0$  a  $r < 0$  populace exponenciálně klesá (vymírá)

$x(0) > 0$  a  $r = 0$  populace se nemění (je konstantní)

rovnovážný stav  $x'(t) = 0$  pro  $t > 0$  (muže být stabilní nebo nestabilní).

Stabilita rovnovážných stavů a analýza rovnic Malthusova modelu:

Stav systému považujeme za rovnovážný, pokud platí:

$$x'(t) = 0, \text{ pro } t \geq 0. \quad (59)$$

„Rovnovážný stav  $x^*$  systému je považován za stabilní, pokud se tento systém vychýlí z daného stavu pomocí nějaké malé poruchy a dostane se do stavu (stavů), že se jeho (jejich) vzdálenost od původního stavu ne zvětšuje. Když se systém po vychýlení z rovnovážného stavu vrací zpět do původního stavu, hovoříme o asymptotické stabilitě. Pokud systém po vychýlení tento stav opouští, je rovnováha nestabilní (labilní).“ [1]

Existují dvě složky, které stabilitu systému ovlivňují:

- **Odolnost (setrvačnost)** – je to schopnost systému zachovávat při rušivém působení původní stav. Odolnost systému je tím větší, čím menší je výchylka.
- **Pružnost** – je to schopnost systému vracet se po ukončení poruchy zpět do původního systému.

Funkce systému je popsána diferenciální rovnicí:

$$x'(t) = f(x) \quad (60)$$

$f(x)$  je obecně nelineární funkcí  $x$ , pak jeho rovnovážné stavy  $x^*$  jsou určeny řešením rovnice  $f(x) = 0$  a říkáme, že jsou lineárně stabilní vůči malým poruchám, když  $f'(x^*) < 0$  a nestabilní, pokud  $f'(x^*) > 0$ .

Předpokládejme, že systém je vychýlen malou poruchou  $n(t)$  z rovnovážného stavu  $x^*$  do nového stavu  $xn(t)$ , přičemž platí, že  $|n(t)| = |xn(t) - x^*| \ll 1$ . V tom případě lze úvodní diferenciální rovnici přepsat do tvaru

$$n'(t) = f(x^* + n) \approx f(x^*) + n \cdot f'(x^*) + \dots \quad (61)$$

Po linearizaci platí: 
$$n'(t) \approx n \cdot f'(x^*), \quad (62)$$

a z toho plyne tato rovnice - 
$$n(t) \approx \exp[f'(x^*)t]. \quad (63)$$

Tedy  $n(t)$  roste či klesá (systém je nestabilní či stabilní) podle toho, zda

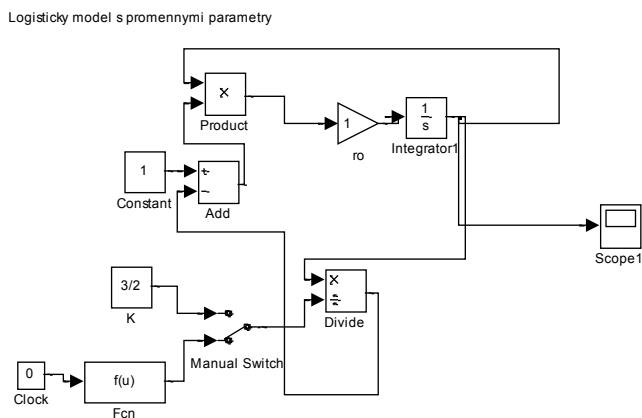
$$f'(x^*) > 0 \text{ nebo } f'(x^*) < 0. \quad (64)$$

[1], [2], [6]

## 4.2 Logistický model s proměnnými parametry

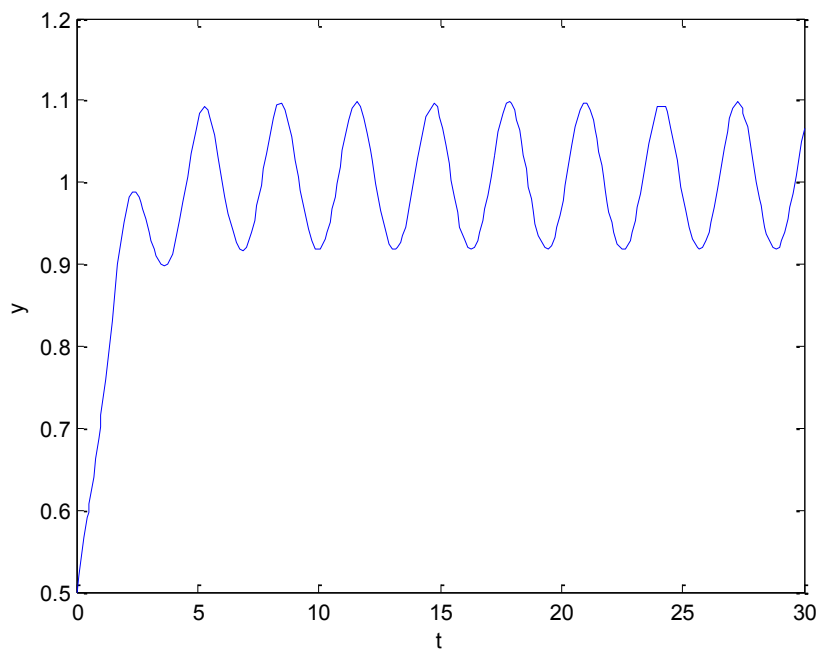
### Řešení modelu v MATLABU

#### 1) Blokové schéma



Obrázek 16 Blokové schéma Logistického modelu v Matlabu

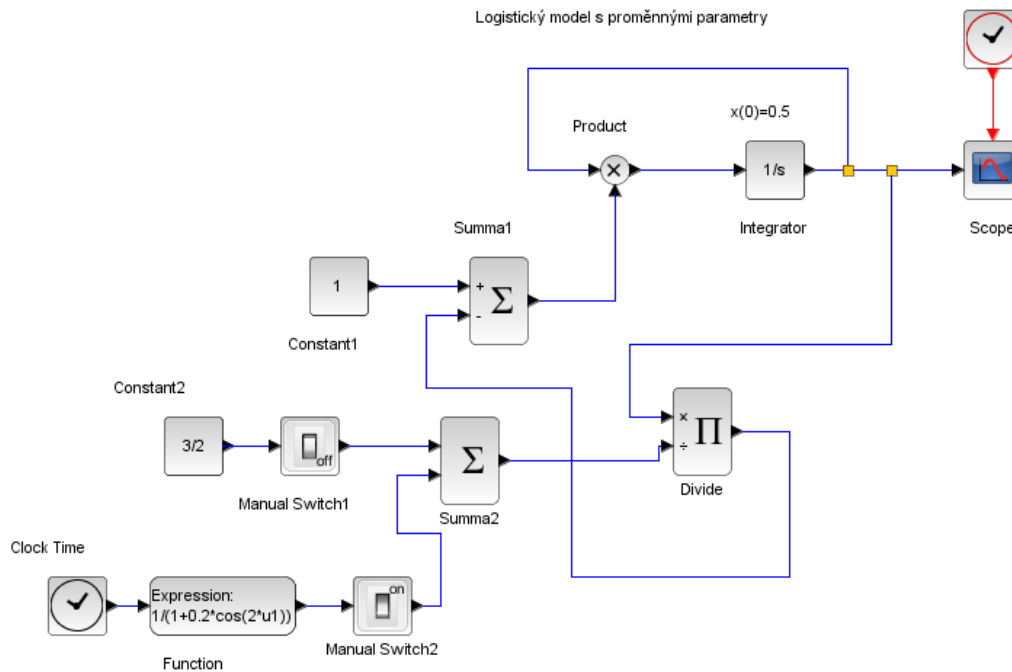
#### 2) Grafické řešení



Obrázek 17 Grafické řešení z Matlabu

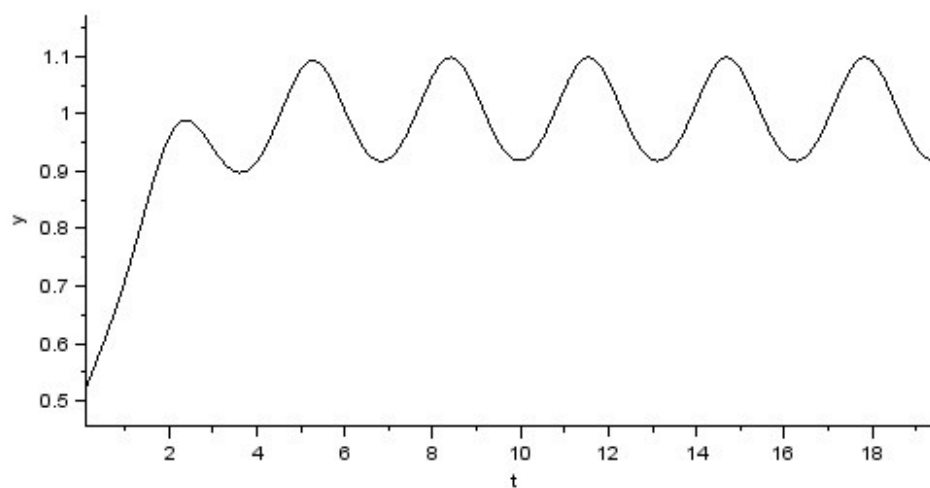
## Řešení modelu ve SCILABU

### 1) Blokové schéma



**Obrázek 18** Blokové schéma Logistického modelu ve Scilabu

### 2) Grafické řešení



**Obrázek 19** Grafické řešení ze Scilabu

### Analýza logistického modelu s proměnnými parametry:

Logistický model s proměnnými parametry, je realističtější než například Malthusův model, protože zahrnuje vliv prostředí, ve kterém daná populace žije. Jedná se jak o potravu, tak například o dostatek místa a podobně. Když je potravy dostatek populace roste (tzv. prospívá). Pokud je potravy málo, dochází k vnitrodruhové konkurenci. Kdy jeden jedince „požirá“ druhého. Další vliv, který způsobuje nedostatek potravy je omezená porodnost. Důsledkem toho je řídící hustota populace. Naopak přemnožení jedince, způsobí za nějakou dobu nedostatek potravy. Prostředí zde udává K.

Stabilita rovnovážných stavů logistického modelu:

Rovnovážné stavy logistické rovnice stanovíme z rovnice:

$$\rho \left(1 - \frac{x(t)}{K}\right) \cdot x(t) = 0 \quad (65)$$

Pro  $\rho = 0$  je řešením logistické rovnice jakákoliv konstantní funkce, proto se zaměříme spíše na situaci, kdy  $\rho \neq 0$ . V tomto případě jsou rovnovážné stavy:

$$x^*_1(t) = 0 \quad \text{a} \quad x^*_2(t) = K$$

Jejich stabilitu určíme podle věty o stabilitě:

$$f'(x) = \left[ \rho x \left(1 - \frac{x}{K}\right) \right]' = \left[ \rho x - \frac{\rho x^2}{K} \right]' = \rho - \frac{2\rho x}{K} \quad (66)$$

Potom platí:

$$\begin{aligned} f'(0) = \rho \text{ a pro } \rho > 0 \text{ je } f'(0) > 0 & \Rightarrow x^* = 0 \text{ je nestabilní;} \\ \rho < 0 \text{ je } f'(0) < 0 & \Rightarrow x^* = 0 \text{ je stabilní.} \end{aligned}$$

$$\text{Pro } x^*(t) = K \text{ je} \quad (67)$$

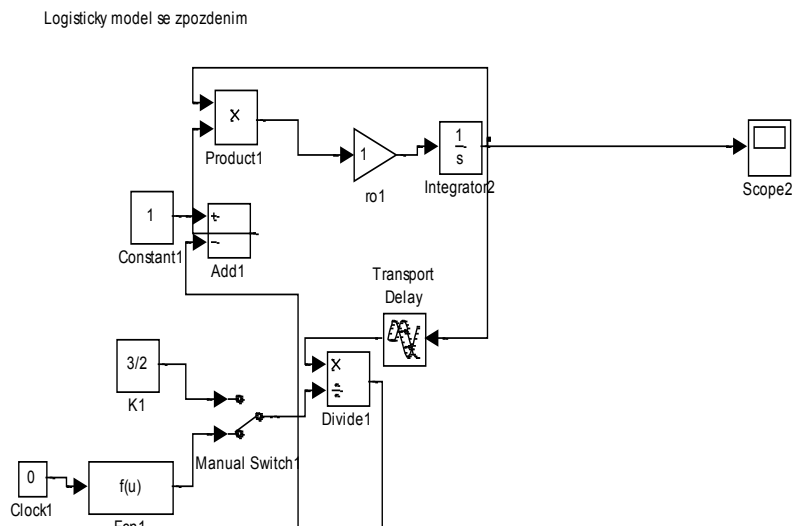
$$\begin{aligned} f'(K) = -\rho \text{ a pro } \rho > 0 \text{ je } f'(K) < 0 & \Rightarrow x^* = K \text{ je stabilní;} \\ \rho < 0 \text{ je } f'(K) > 0 & \Rightarrow x^* = K \text{ je nestabilní.} \end{aligned}$$

[1]

## 4.3 Logistický model se zpožděním

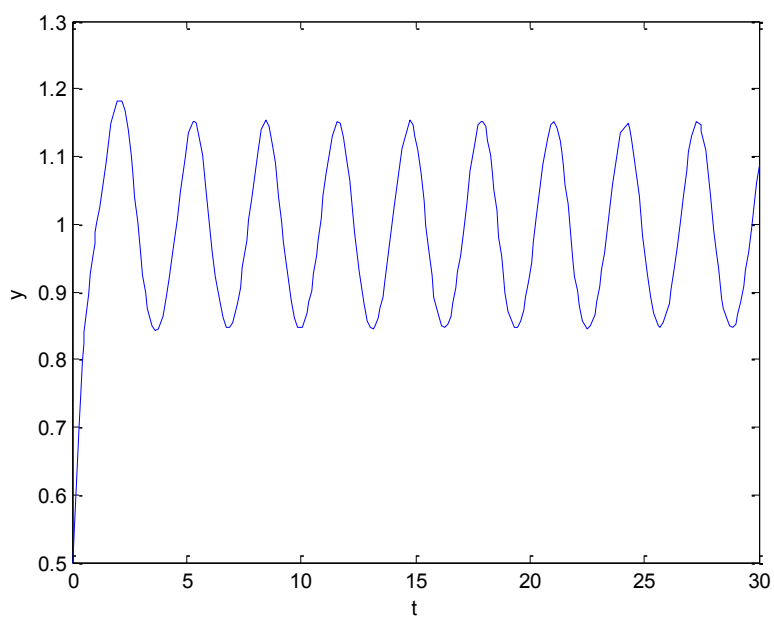
Řešení modelu v MATLABU:

1) Blokové schéma



Obrázek 20 Blokové schéma Logistického modelu se zpožděním v Matlabu

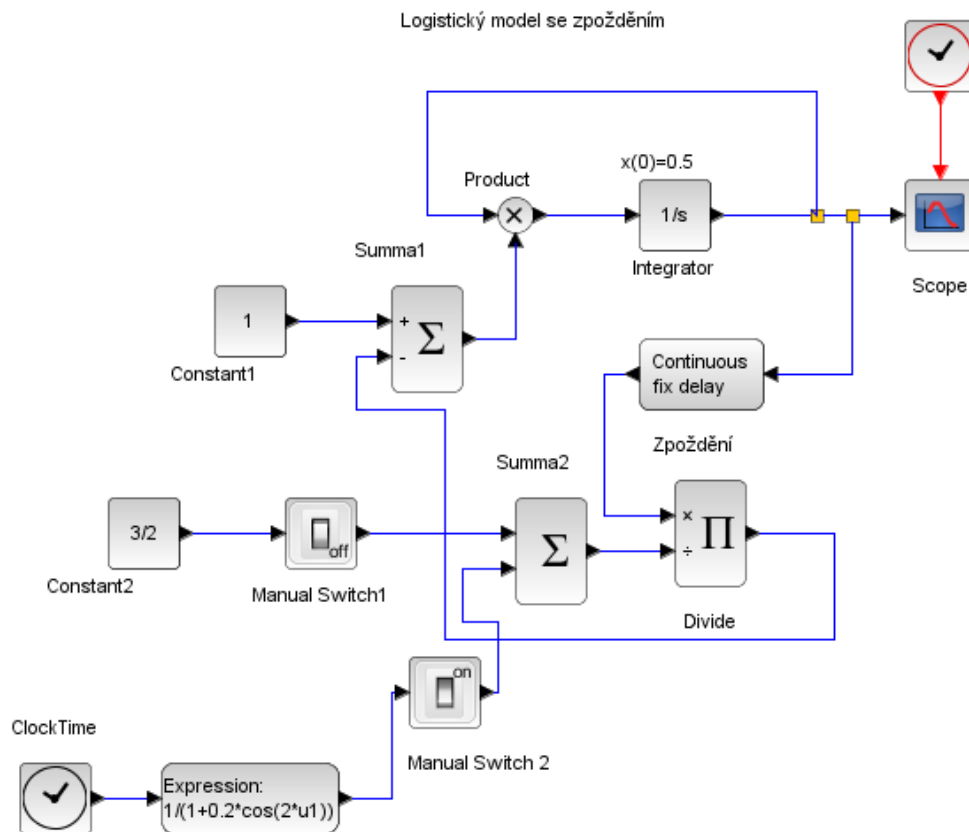
2) Grafické řešení



Obrázek 21 Grafické řešení z Matlabu

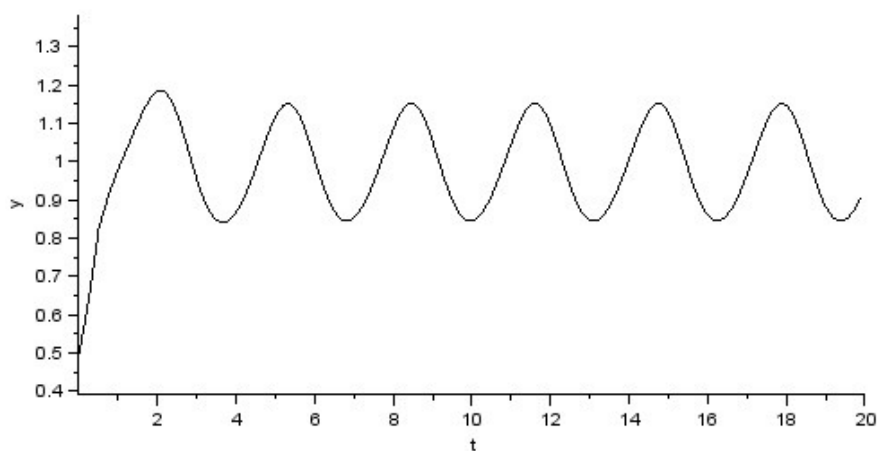
## Řešení modelu ve SCILABU

### 1) Blokové schéma



Obrázek 22 Blokové schéma ve Scilabu

### 2) Grafické řešení



Obrázek 23 Grafické řešení ze Scilabu

### Analýza Logistického se zpožděním:

Tento model je reálnější než například Malthusův model. V případě modelu logistického se zpožděním můžeme zahrnout časové zpoždění. Zohledňuje se zde doba od narození po dospělost daného jedince. Dospělostí se myslí jeho schopnost reprodukce. Tato doba, kdy jedinci trvá dospět, se považuje za zpoždění. Jako zpoždění se může brát i gravidita jedince. Když populace prospívá a počet jedinců roste, začne docházet k vnitrodruhové konkurenci. Záleží také na dostatku potravy. Rozmnožování je ovlivněno dále dostatkem jedinců a jejich zdravotním stavem. Zpoždění je udáváno  $T$ .

Stabilita rovnovážných stavů logistického modelu:

Rovnovážné stavy logistické rovnice stanovíme z rovnice:

$$\rho \left( 1 - \frac{x(t)}{K} \right) \cdot x(t) = 0 \quad (68)$$

Pro  $\rho = 0$  je řešením logistické rovnice jakákoliv konstantní funkce, proto se zaměříme spíše na situaci, kdy  $\rho \neq 0$ . V tomto případě jsou rovnovážné stavy:

$$x^*_1(t) = 0 \quad \text{a} \quad x^*_2(t) = K$$

Jejich stabilitu určíme podle věty o stabilitě:

$$f'(x) = \left[ \rho x \left( 1 - \frac{x}{K} \right) \right]' = \left[ \rho x - \frac{\rho x^2}{K} \right]' = \rho - \frac{2\rho x}{K} \quad (69)$$

Potom platí:

$$f'(0) = \rho \text{ a pro } \rho > 0 \text{ je } f'(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = 0 \text{ je nestabilní;}$$

$$\rho < 0 \text{ je } f'(0) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = 0 \text{ je stabilní.}$$

$$\text{Pro } x^*(t) = K \text{ je} \quad (70)$$

$$f'(K) = -\rho \text{ a pro } \rho > 0 \text{ je } f'(K) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = K \text{ je stabilní;}$$

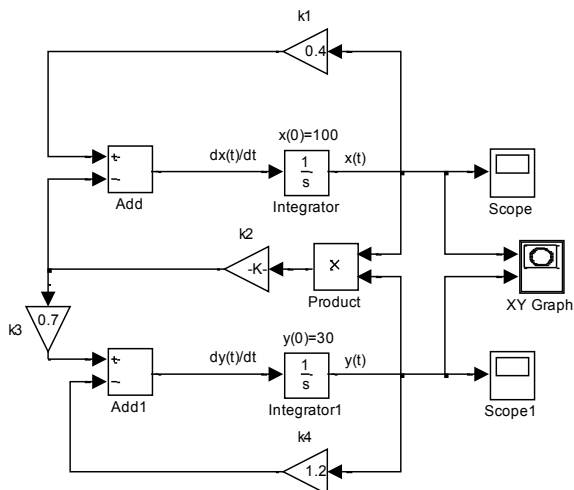
$$\rho < 0 \text{ je } f'(K) > 0 \quad \Rightarrow \quad x^* = K \text{ je nestabilní.}$$

[1]

## 4.4 Lotka Volterra

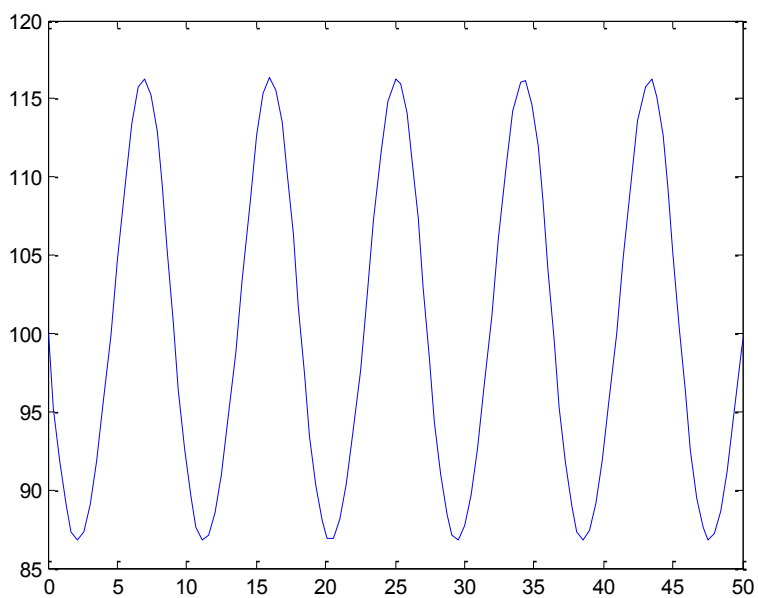
Řešení modelu v MATLABU:

1) Blokové schéma



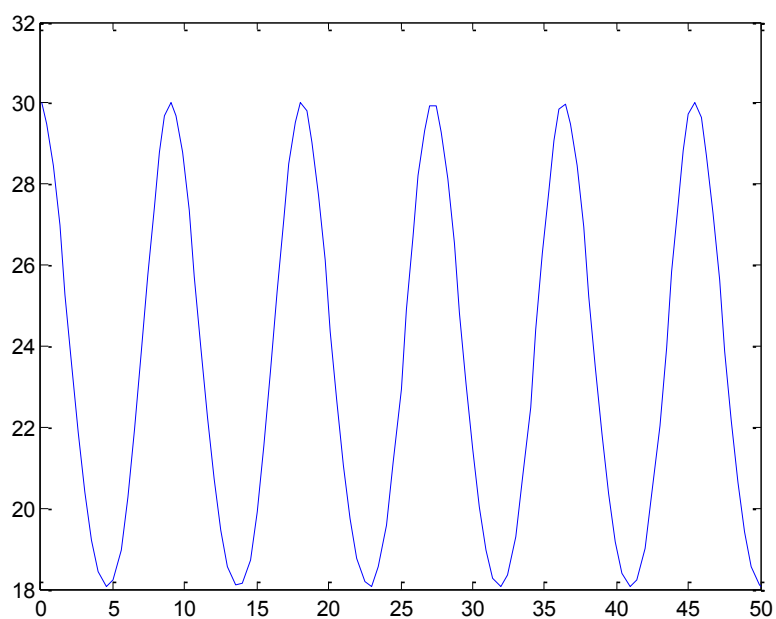
Obrázek 24 Blokové schéma Lotka Volterra v Matlabu

2) Grafické řešení



Obrázek 25 Grafické řešení kořist v Matlabu



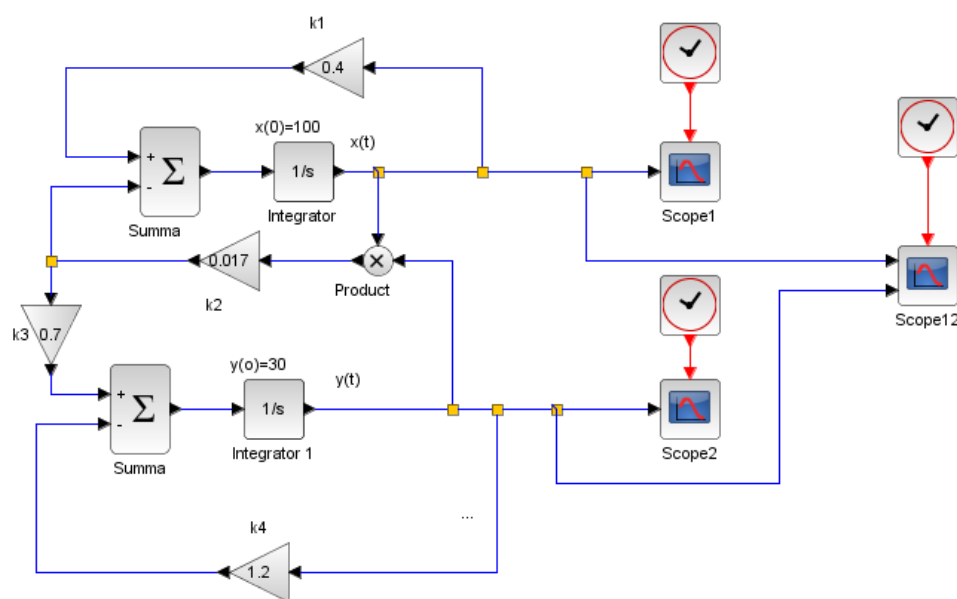


Obrázek 26 Grafické řešení predátor v Matlabu

## Řešení modelu ve SCILABU

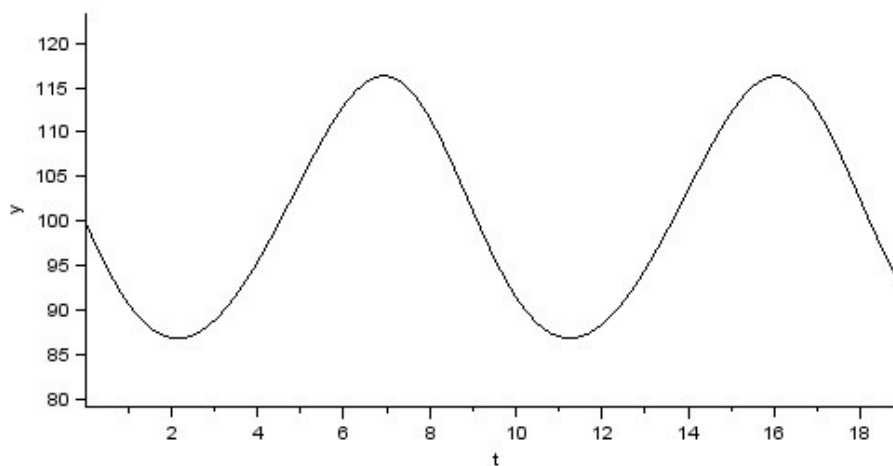
### 1) Blokové schéma

Model Lotka Volterra

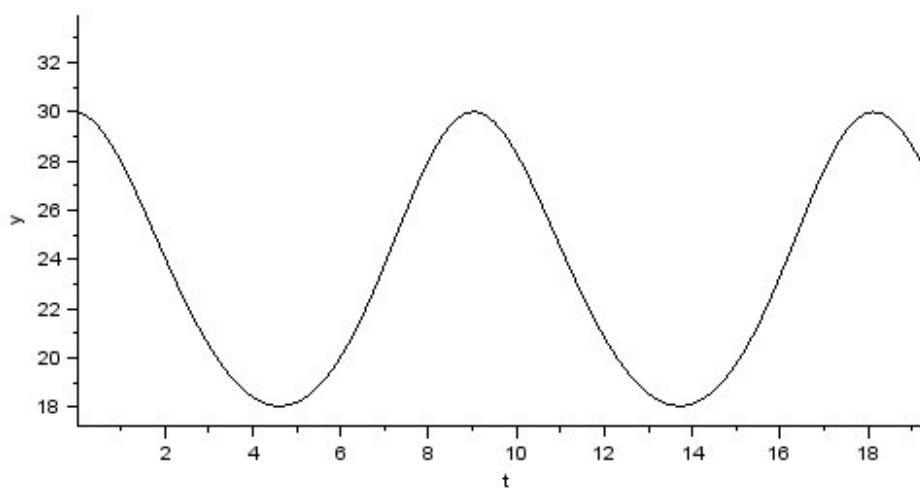


Obrázek 27 Blokové schéma modelu ve Scilabu

## 2) Grafické řešení



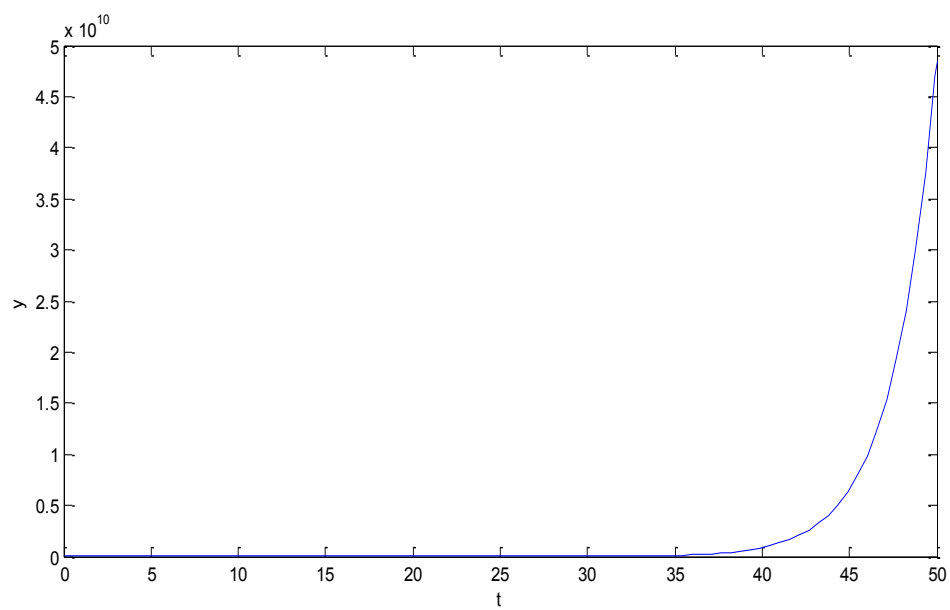
**Obrázek 28** Grafické řešení Kořisti ve Scilabu



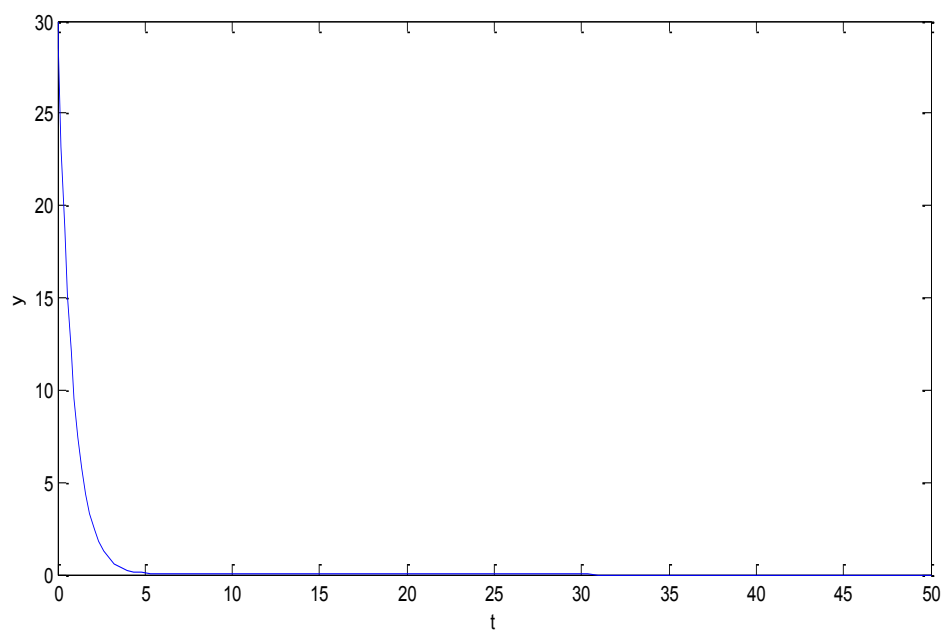
**Obrázek 29** Grafické řešení Predátor ve Scilabu

V modelu Lotka Voltarra máme několik parametrů  $K$ , které můžeme měnit. Změnou těchto čísel můžeme vidět, jak se mění křivky kořisti a predátory. Kdy převažuje počet kořisti a kdy predátorů.

Pro ukázkou jsem zvolila  $k_2=0$



**Obrázek 30** Graf kořisti pro  $k_2=0$



**Obrázek 31** Graf predátora pro  $k_2=0$

### Analýza Lotka Volterra:

U modelu Lotka Volterra platí, že ani kořist, ani dravec nemohou žít donekonečna. Dá se říci, že obě populace vzájemným kontaktem trpí. Když jedna populace prospívá, druhá chřadne (býložravec, rostlina). Výsledným grafem je sinusovka. Platí zde, že dravec nebo kořist může vyhynout. Nebo se může jejich populace snížit.

Stabilita rovnovážných stavů a analýza rovnic Lotky Volterra:

Základní rovnice:

$$u(\tau) = \frac{k_2 \cdot k_3 \cdot x(t)}{k_4}, \quad v(\tau) = \frac{k_2 \cdot x(t)}{k_1}, \quad \tau = k_1 \cdot x(t), \quad \alpha = k_4 / k_1 \quad (71)$$

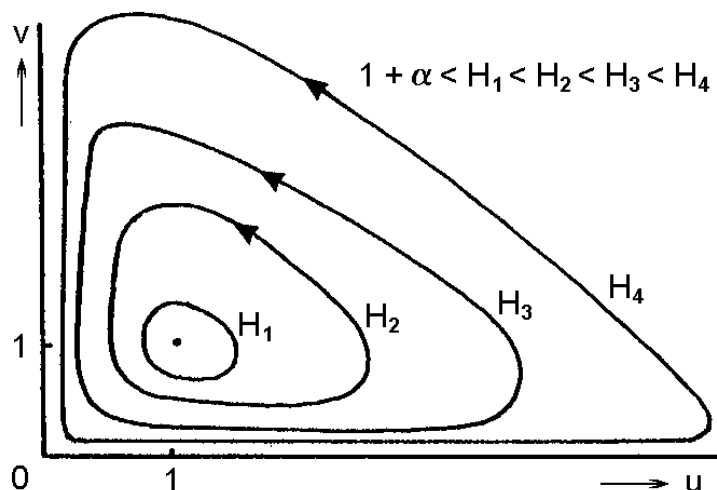
Definiční rovnice se pak transformují do tvaru:

$$\frac{du}{d\tau} = u \cdot (1 - v), \quad \frac{dv}{d\tau} = \alpha \cdot v \cdot (u - 1) \quad (*) \quad (72)$$

Vzájemná závislost mezi stavovými veličinami  $u$  a  $v$ , dostáváme podělením rovnice pro  $dv/d\tau$  rovnicí pro  $du/d\tau$ .

$$\frac{dv}{du} = \alpha \cdot \frac{v \cdot (u - 1)}{u \cdot (1 - v)} \quad (73)$$

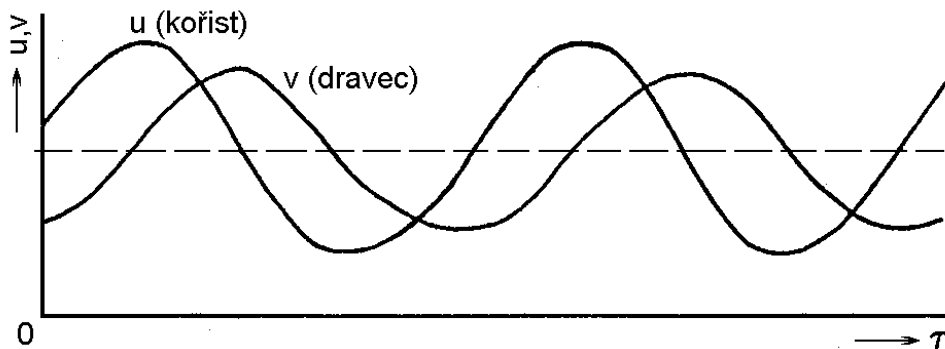
Integrací daného stavu, dostaneme:  $\alpha \cdot u + v - \ln(u\alpha \cdot v) = H$ , kde  $H$  je integrační konstanta. Pro tuto konstantu platí:  $H > H_{\min} = 1 + \alpha$ , což je pro  $u = v = 1$ .



Obrázek 32 Analýza Lotka Volterra. Převzato z [1]

Uzavřené stavové trajektorie pro různé hodnoty  $H > H_{\min}$  v rovině  $(u,v)$  ukazují na periodické řešení v čase  $\tau$  jak pro proměnnou  $u$ , tak i  $v$ , přičemž konkrétní časové průběhy jsou dány počátečními podmínkami, které také určují parametr  $H$

$$(H = \alpha \cdot u(0) + v(0) - \ln(u(0)\alpha \cdot v(0))). \quad (74)$$



**Obrázek 33** Obecné grafické řešení Lotka Volterra. Převzato z [1]

Lotkův - Volterův model má dva singulární, rovnovážné stavy:

$$u_1^* = v_2^* = 0 \quad \text{a} \quad u_1^* = v_2^* = 1,$$

což vyplývá z rovnic (\*) pro  $u' = v' = 0$ .

Pro malé poruchy  $nu$  a  $nv$  v okolí rovnovážných stavů platí:

$$u = u^* + nu$$

$$v = v^* + nv$$

a po dosazení těchto vztahů do (\*) máme

$$(u^* + nu)' = (u^* + nu) \cdot (1 - v^* - nv)$$

$$(v^* + nv)' = \alpha \cdot (v^* + nv) \cdot (u^* + nu - 1)$$

Po substituci za rovnovážný stav  $u_1^* = v_2^* = 0$  je

$$nu' = nu \cdot (1 - nv) = nu - nu \cdot nv$$

$$nv' = \alpha \cdot nv \cdot (nu - 1) = \alpha \cdot nv \cdot nu - \alpha \cdot nv$$

Když budeme předpokládat, že poruchové signály  $nu$  a  $nv$  jsou malé, můžeme zanedbat členy obsahující jejich součiny a dostáváme:

$$nu' = nu \cdot (1 - nv) = nu$$

$$nv' = \alpha \cdot nv \cdot (nu - 1) = -\alpha \cdot nv$$

a maticový zápis pro tyto dvě rovnice je

$$\begin{bmatrix} n_u' \\ n_v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_u \\ n_v \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} n_u \\ n_v \end{bmatrix} \quad (75)$$

„V matematické ekologii nazýváme matici A maticí komunity a její vlastní čísla určují stabilitu rovnovážných stavů a její charakter. Pokud je reálná hodnota alespoň jednoho vlastního čísla kladná, pak je rovnovážný stav nestabilní, jsou-li reálné hodnoty všech vlastních čísel záporné, pak je rovnovážný stav stabilní. V případě, že jsou vlastní čísla ryze imaginární, můžeme hovořit o neutrální stabilitě. „ [1]

Řešení rovnice (ekvivalentně řešení lineární diferenciální rovnice 1.řádu - viz Malthusova rovnice) nabývá obecného tvaru:

$$\begin{bmatrix} n_u \\ n_v \end{bmatrix} = B \cdot e^{\lambda t} \quad (76)$$

, kde B sloupcový vektor libovolných konstant reprezentující počáteční podmínky a hodnoty vlastních čísel  $\lambda$  matice A určíme řešením charakteristického polynomu

$$|A - \lambda \cdot I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\alpha \quad (77)$$

Jedno z vlastních čísel je větší jak nula a proto,  $n_u$  a  $n_v$  rostou exponenciálně a tedy rovnovážný stav  $u_1^* = v_2^* = 0$  je lineárně nestabilní. Protože  $\lambda_1 > 0$  a  $\lambda_2 < 0$  je singularita v bodě  $u_1^* = v_2^* = 0$  typu sedlový bod. **Sedlový bod** je takový bod matice, který je maximální ve svém sloupci a minimální ve svém řádku nebo naopak.

Pro singularitu v bodě  $u_1^* = v_2^* = 1$  máme po dosazení do vztahů (\*)

$$(1 + n_u)' = (1 + n_u) \cdot (1 - 1 - n_v) ; \quad (1 + n_v)' = \alpha \cdot (1 + n_v) \cdot (1 + n_u - 1) , \text{ a dále}$$

$$n_u' = (1 + n_u) \cdot (-n_v) = -n_u \cdot n_v - n_v ; \quad n_v' = \alpha \cdot (1 + n_v) \cdot n_u = \alpha \cdot n_u + \alpha \cdot n_u n_v .$$

Opět po zanedbání součinných členů dostáváme stavové rovnice v maticovém tvaru:

$$\begin{bmatrix} n_u' \\ n_v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_u \\ n_v \end{bmatrix} \quad (78)$$

a vlastní čísla matice soustavy získáme řešením rovnice

$$\begin{vmatrix} -\lambda - 1 \\ \alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm j \cdot \sqrt{\alpha} \quad (79)$$

Obě vlastní čísla leží na imaginární ose a jejich reálná složka je tedy nulová, je rovnovážný stav  $u_1^* = v_2^* = 1$  neutrálně stabilní a dotyčná singularita je typu střed.

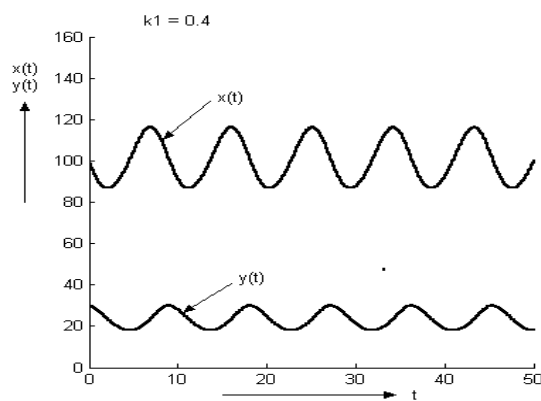
Řešení poslední soustavy má potom tvar:

$$\begin{bmatrix} n_u \\ n_v \end{bmatrix} r \cdot e^{j\sqrt{\alpha}\tau} + s \cdot e^{-j\sqrt{\alpha}\tau} \quad (80)$$

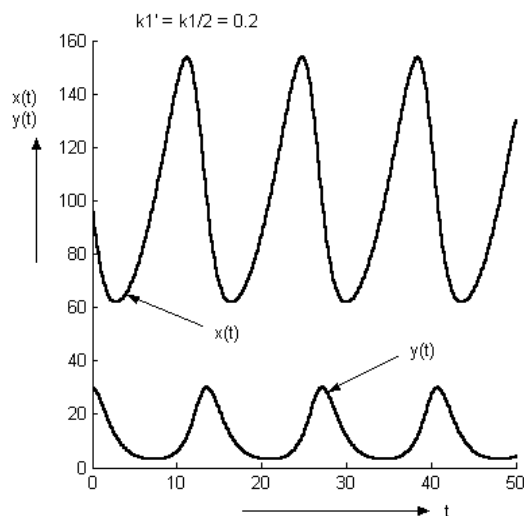
, kde  $r$  a  $s$  jsou vlastní vektory matice soustavy náležející vlastním číslům.

V blízkém okolí singulárního bodu (bod, ve kterém má rovnice nebo bod výjimečné vlastnosti), má řešení Lotkova - Volterrova modelu harmonický průběh s periodou  $2\pi/\sqrt{\alpha}$ , v nenormalizovaném případě  $2\pi/\sqrt{k_4/k_1}$ . [1], [6]

**Vliv omezení porodnosti na stav populace dravec – kořist:**



**Obrázek 34**  $k_1 = 0,4$ ,  $k_2 = 0,017$ ,  $k_3 = 0,7$  a  $k_4 = 1,2$

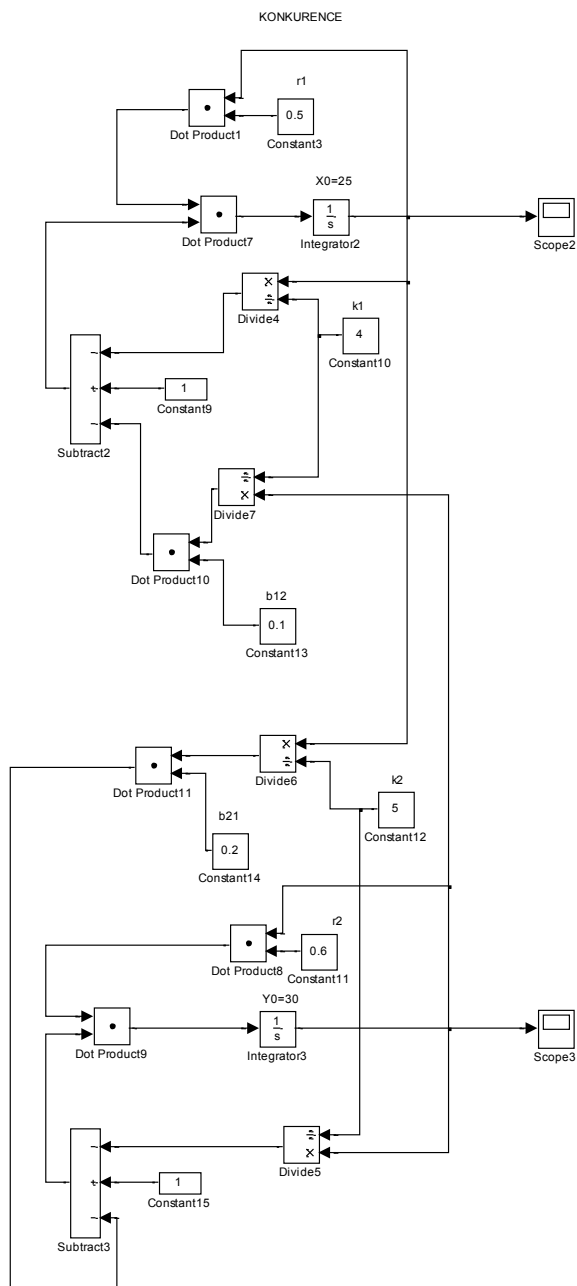


**Obrázek 35**  $k_1 = 0,2$ ,  $k_2 = 0,017$ ,  $k_3 = 0,7$  a  $k_4 = 1,2$

## 4.5 Model konkurence

Řešení v Matlabu:

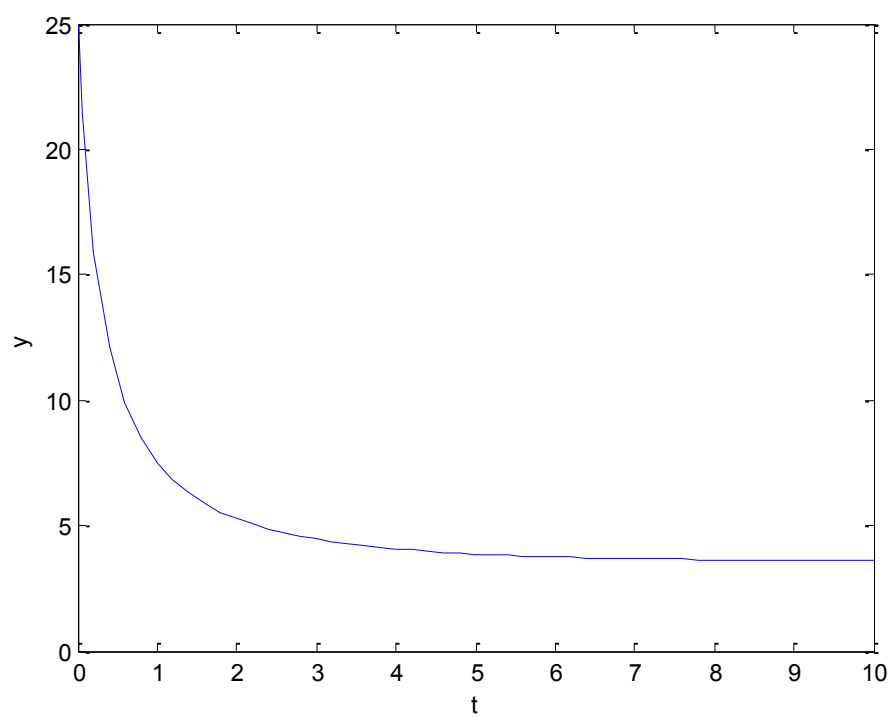
1) Blokové schéma



Obrázek 36 Blokové schéma modelu kořisti v Matlabu



## 2) Grafické řešení

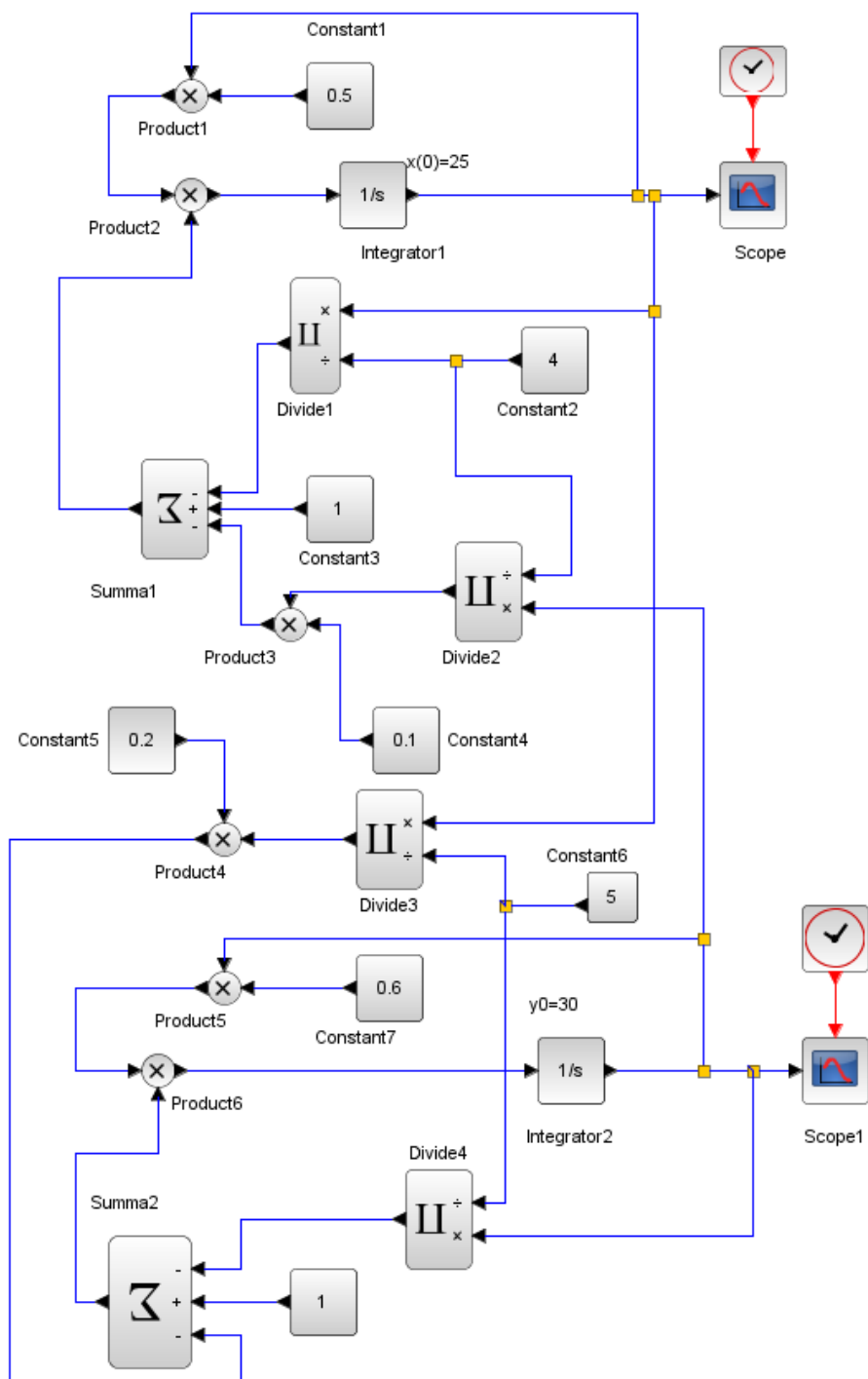


**Obrázek 37** Grafické řešení v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

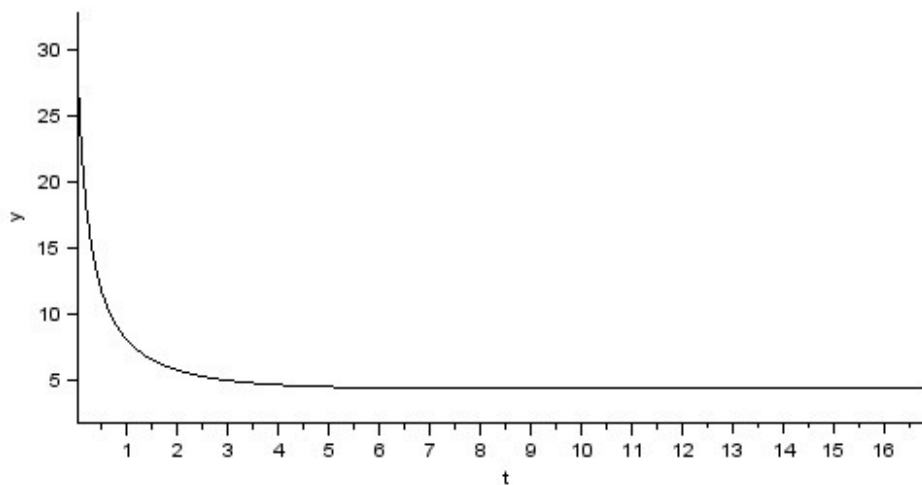
### 1) Blokové schéma

Model Konkurence



**Obrázek 38** Blokové schéma modelu konkurence ve Scilabu

## 2) Grafické řešení



**Obrázek 39** Grafické řešení modelu ve Scilabu

### **Analýza modelu konkurence:**

Když vezme takzvaný Lotkúv-Volterrův model s velikostmi populací  $X(t)$  a  $Y(t)$ : Můžeme předpokládat, že populace mají logistický růst v případě absence konkurenční populace.

Získáváme tak tento systém diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= r_1 \cdot x \left( 1 - \frac{x}{K_1} - b_{12} \cdot \frac{y}{K_1} \right) \\ \frac{dy}{dt} &= r_2 \cdot y \left( 1 - \frac{y}{K_2} \right) - b_{21} \cdot \frac{x}{K_2} \end{aligned} \quad (81)$$

, kde  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $K_1$ ;  $K_2$ ;  $b_{12}$  a  $b_{21}$  jsou kladné konstanty. Konstanty  $r_1$  a  $r_2$  jsou koeficienty růstu populací  $X$  a  $Y$  a konstanty  $K_1$  a  $K_2$  jsou odpovídající nosné kapacity prostředí (tj. hodnoty, na kterých by se velikost dané populace ustálila v případě absence konkurenční populace). Míra vlivu  $Y$  na  $X$  je dána konstantou  $b_{12}$  a  $b_{21}$  udává, jak moc je  $Y$  ovlivněná populací  $X$ .

Abychom si analýzu zjednodušili, použijeme normalizovanou verzi modelu. (Přechod na bezrozměrné jednotky). Transformační vztahy jsou:

$$u_1 = \frac{x_1}{K_1}, \quad u_2 = \frac{x_2}{K_2}, \quad \tau = \rho_1 \cdot t, \quad R = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad a_{12} = b_{12} \cdot \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \cdot \frac{K_1}{K_2} \quad (82)$$

Tak se transformuje soustava rovnic do tvaru:

$$\frac{du_1}{d\tau} = u_1 \cdot (1 - u_1 - a_{12} \cdot u_2) = f_1(u_1, u_2) \quad (83)$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = R \cdot u_2 (1 - u_2 - a_{21} \cdot u_1) = f_2(u_1, u_2) \quad (84)$$

Rovnovážné body  $u_1^*$  a  $u_2^*$ , a tedy i singularity (výjimečný bod v jinak spojitým průběhu nějaké funkce nebo nějakého děje) ve stavové rovině, stanovíme řešením rovnic  $f_1(u_1, u_2) = f_2(u_1, u_2) = 0$ . Tak určeny jsou:

$$U_1^* = 0; u_2^* = 0; \quad u_1^* = 1; u_2^* = 0; \quad u_1^* = 0; u_2^* = 1$$

$$a \quad u_1^* = \frac{1 - a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}}, \quad u_2^* = \frac{1 - a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}} \quad (85)$$

Varianta má smysl jen když  $a_{12}, a_{21} \neq 1$  a  $u_1^* \geq 0; u_2^* \geq 0$ . Tyto body můžeme znázornit geometricky ve stavové rovině  $u_1, u_2$  jako průsečíky přímek o rovnicích

$$1 - u_1 - a_{12} \cdot u_2 = 0 \quad a \quad 1 - u_2 - a_{21} \cdot u_1 = 0.$$

Stabilita rovnovážných bodů se určí z matice:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2u_1 - a_{12}u_2 & -a_{12}u_1 \\ -R \cdot a_{12}u_2 & R \cdot (1 - 2u_2 - a_{21}u_1) \end{bmatrix} \quad (86)$$

Rovnovážný stav (0; 0) je nestabilní, protože odpovídající vlastní čísla matice komunity jsou kladná.:

$$|A - \alpha I| = \begin{vmatrix} 1 - \alpha & 0 \\ 0 & R - \alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 1, \alpha_2 = R \quad (87)$$

Vlastní čísla matice komunity pro druhý rovnovážný stav (1; 0) jsou:

$$|A - \alpha I| = \begin{vmatrix} -1 - \alpha & -a_{12} \\ 0 & R \cdot (1 - a_{12}) - \alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1, \alpha_2 = R \cdot (1 - a_{12}) \quad (88)$$

, a proto je tento rovnovážný stav stabilní, když  $a_{12} > 1$ , příp. nestabilní, když  $a_{12} < 1$ .

Poslední rovnovážný stav, pokud leží v kladném kvadrantu stavové roviny  $u_1, u_2$ , nabývá matice **A** tvaru:

$$A = (1 - a_{12}a_{21})^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_{12} - 1 & a_{12}(a_{12} - 1) \\ R \cdot a_{21}(a_{21} - 1) & R \cdot (a_{21} - 1) \end{bmatrix} \quad (89)$$

„Znaménka reálných částí vlastních čísel a tím pádem i stabilita rovnovážných stavů závisí na velikost parametrů  $R, a_{12}$  a  $a_{21}$ . Zejména pro hodnoty parametrů  $a_{12}$  a  $a_{21}$  existuje několik speciálních situací s možnou ekologickou populační interpretací.“ [1]

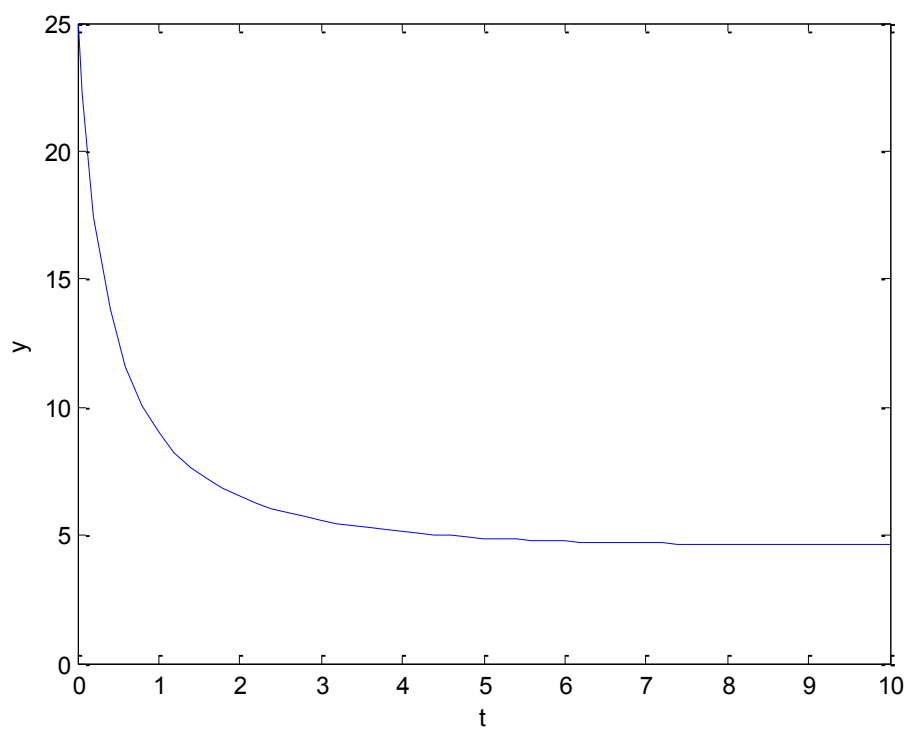
Ty případy jsou: (i)  $a_{12} < 1, a_{21} < 1$ ; (ii)  $a_{12} > 1, a_{21} > 1$ ;

(iii)  $a_{12} < 1, a_{21} > 1$ ; (iv)  $a_{12} > 1, a_{21} < 1$

[1], [6]



## 2) Grafické řešení

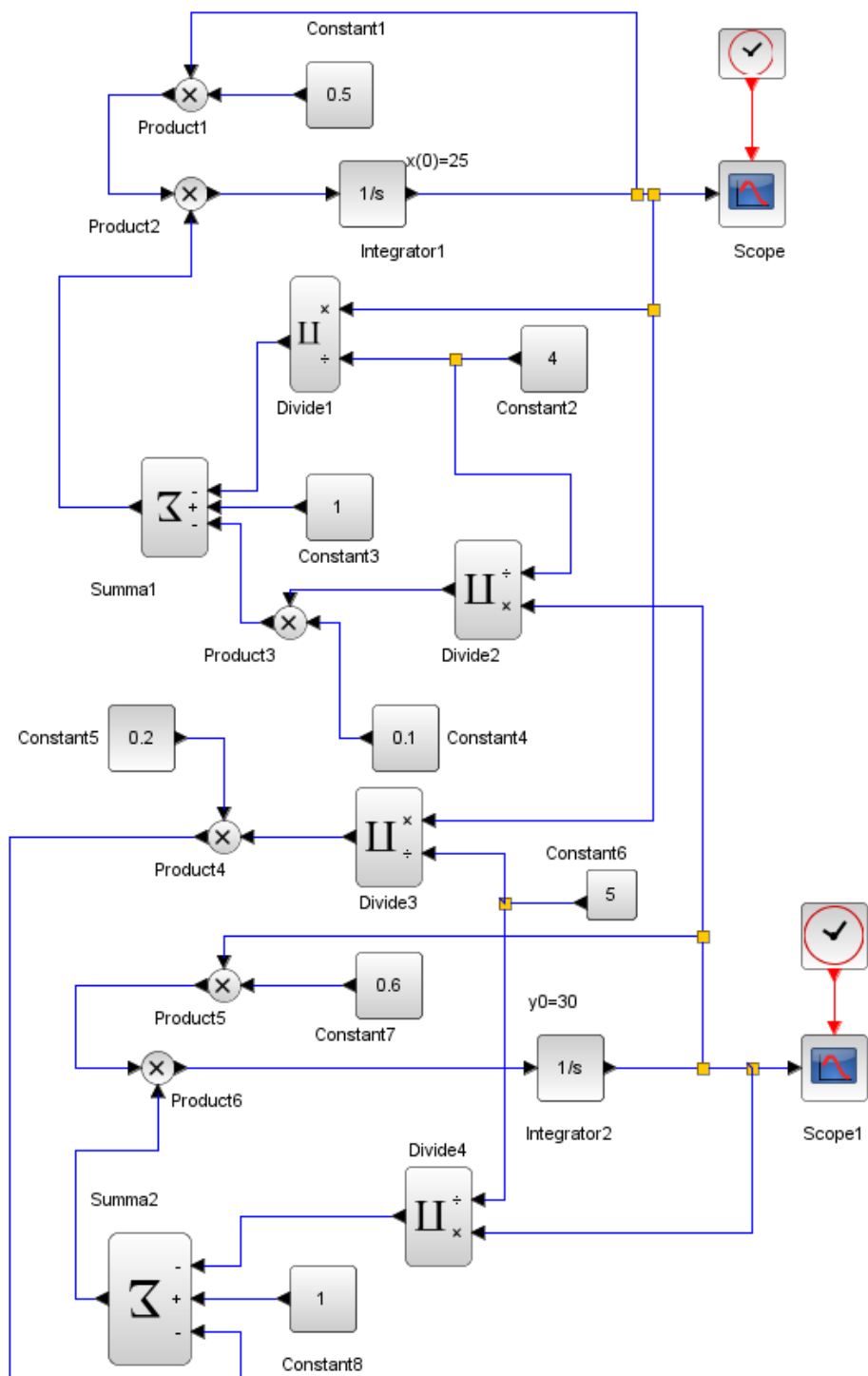


**Obrázek 41** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

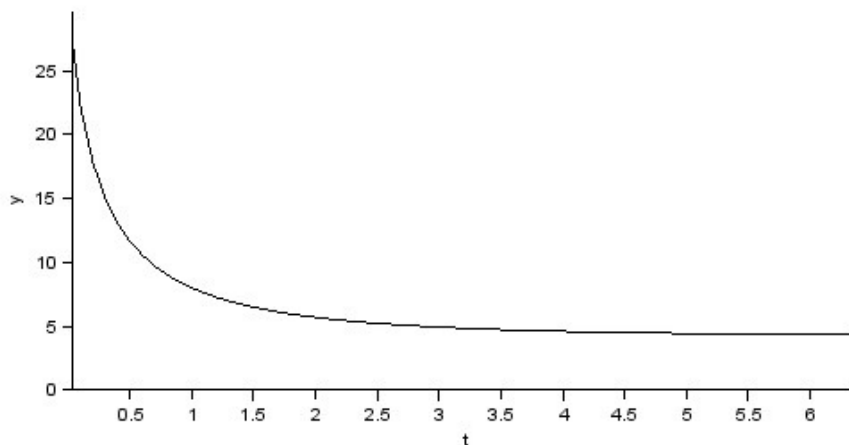
Model Spolupráce



Obrázek 42 Blokové schéma modelu spolupráce ve Scilabu



## 2) Grafické řešení



**Obrázek 43** Grafické řešení modelu ve Scilabu

### Analýzy modelu spolupráce:

Za předpokladu, že máme model s velikostmi  $X(t)$  a  $Y(t)$  a logistickým růstem v případě, že máme absenci druhé populace, máme systém rovnic:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= r_1 \cdot X \left(1 - \frac{X}{K_1} + b_{12} \frac{Y}{K_1}\right) \\ \frac{dY}{dt} &= r_2 \cdot Y \left(1 - \frac{Y}{K_2} + b_{21} \frac{X}{K_2}\right) \end{aligned} \quad (90)$$

kde  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $K_1$ ;  $K_2$ ;  $b_{12}$  a  $b_{21}$  jsou kladné konstanty. Konstanty  $r_1$  a  $r_2$  označují koeficienty růstu populace  $X(t)$  a  $Y(t)$ ;  $K_1$  a  $K_2$  jsou odpovídající nosné kapacity prostředí Konstanta  $b_{12}$  udává míru vlivu  $Y$  na  $X$  a  $b_{21}$  udává, jak moc  $X$  ovlivňuje  $Y$ .

Pokud použijeme stejné normalizační úpravy, jako u modelu konkurence dostaneme (přešli jsme na bezrozměrné jednotky, je to jednodušší):

$$\frac{du_1}{d\tau} = u_1 \cdot (1 - u_1 - a_{12} \cdot u_2) = f_1(u_1, u_2) \quad (91)$$

$$\frac{du_2}{d\tau} = R \cdot u_2 (1 - u_2 - a_{21} \cdot u_1) = f_2(u_1, u_2) \quad (92)$$

Analýzu začneme určením rovnovážných bodů –  $(0;0)$ ,  $(0;1)$ ,  $(1;0)$  a  $(u_1^*; u_2^*)$ , kde

$$u_1^* = \frac{1 + a_{12}}{1 - a_{12}a_{21}} \quad (93)$$

$$u_2^* = \frac{1 + a_{21}}{1 - a_{12}a_{21}} \quad (94)$$

, které jsou kladné pokud  $1 - a_{12}a_{21} \succ 0$ . Pokud dopočítáme matici a její vlastní čísla z jejich rovnovážných stavů zjistíme, že (0;0), (0;1), (1;0) jsou **nestabilní bod** (0;0) je **ryze nestabilní** a body (0;1), (1;0) jsou sedlové body. **Sedlový bod** je takový bod matice, který je maximální ve svém sloupci a minimální ve svém řádku nebo naopak. [1], [6]

## 4.7 Diskrétní modely Malthusovy rovnice

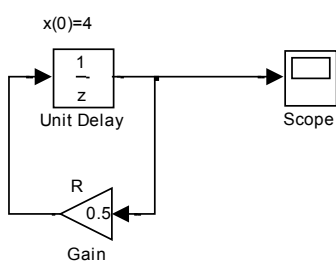
Malthusova rovnice a)  $x_{n+1} = R \cdot x_n$  (95)

**Řešení v Matlabu:**

1) Blokové schéma

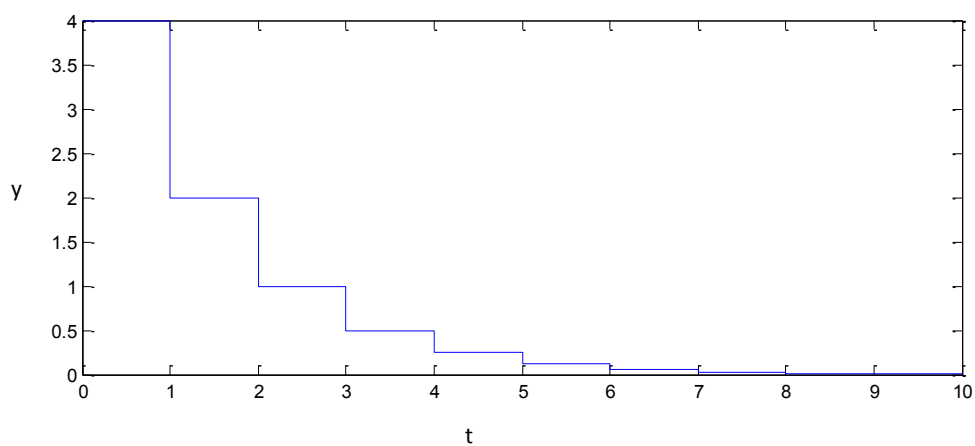
Diskretni Malthusova a)

$x_{n+1} = R \cdot x_n$



**Obrázek 44** Blokové schéma diskrétního Malthusova modelu a) v Matlabu

2) Grafické řešení



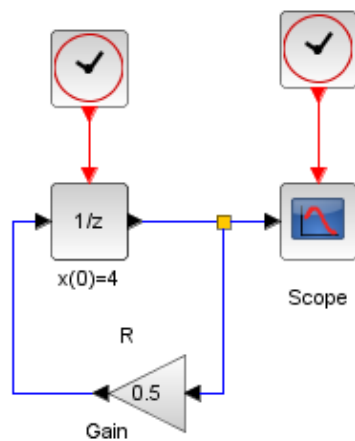
**Obrázek 45** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

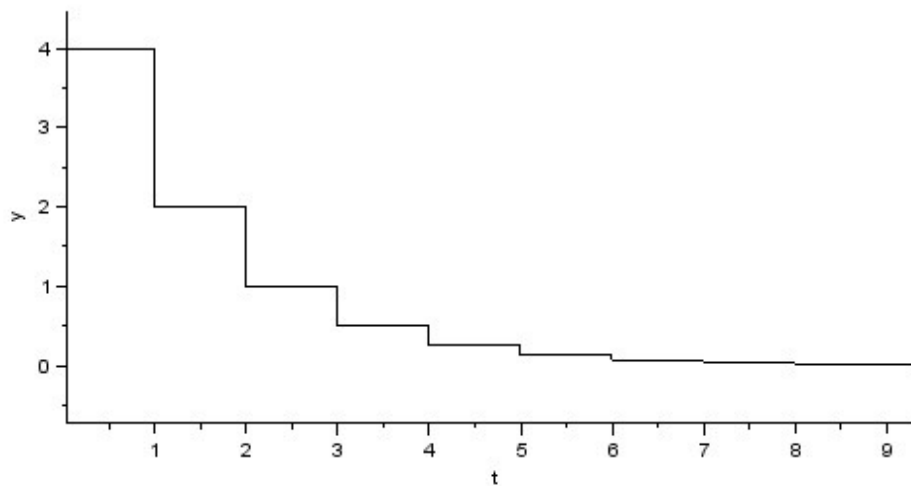
Diskrétní Malthusova a)

$$x_{n+1} = R \cdot x_n$$



**Obrázek 46** Blokové schéma diskrétního Malthusova modelu a) ve Scilabu

### 2) Grafické řešení



**Obrázek 47** Grafické řešení modelu ve Scilabu

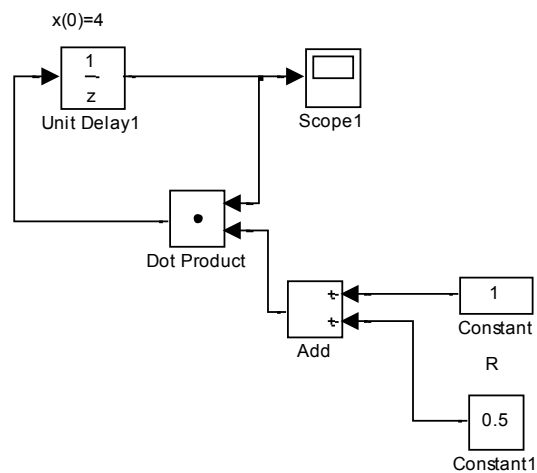
Malthusova rovnice b) modifikace  $x_{n+1} = x_n + R \cdot x_n = (1 + R) \cdot x_n$  (96)

### Řešení v Matlabu:

#### 1) Blokové schéma

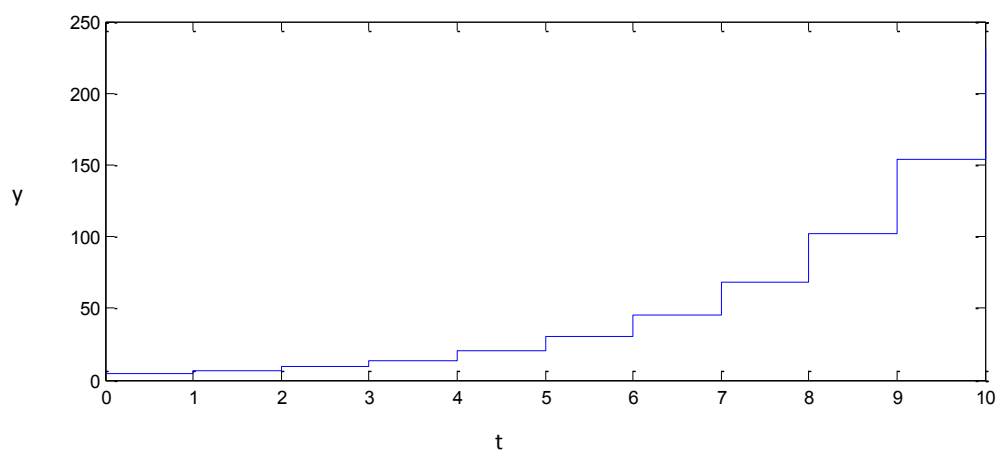
Diskretní Malthusova b) modifikace

$$x_{n+1} = x_n + R \cdot x_n = (1 + R) \cdot x_n$$



**Obrázek 48** Blokové schéma b) modifikace v Matlabu

#### 2) Grafické řešení



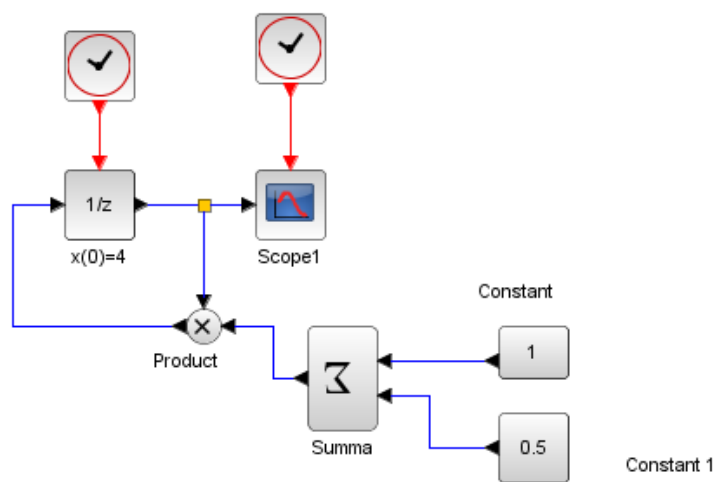
**Obrázek 49** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

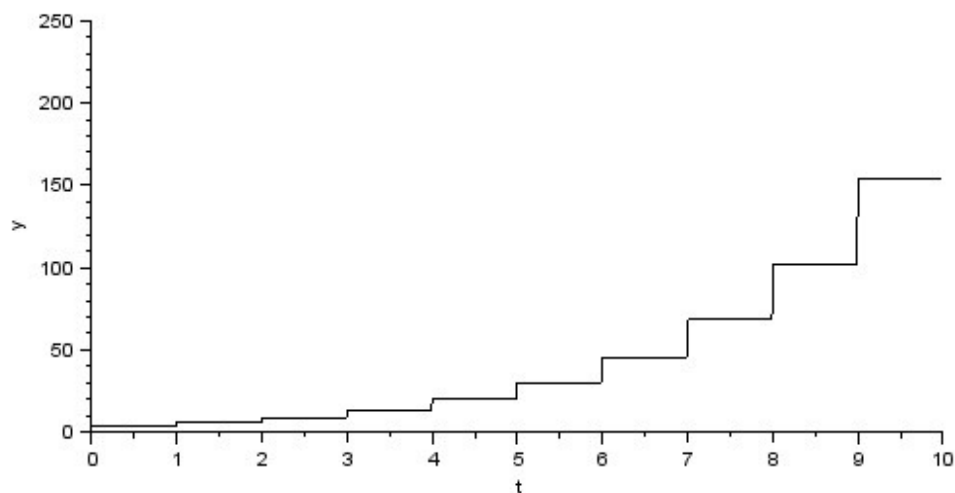
Diskrétní Malthusova b) modifikace

$$x_{n+1} = x_n + x_n \cdot R = (1+R) \cdot x_n$$



**Obrázek 50** Blokové schéma b) modifikace ve Scilabu

### 2) Grafické řešení

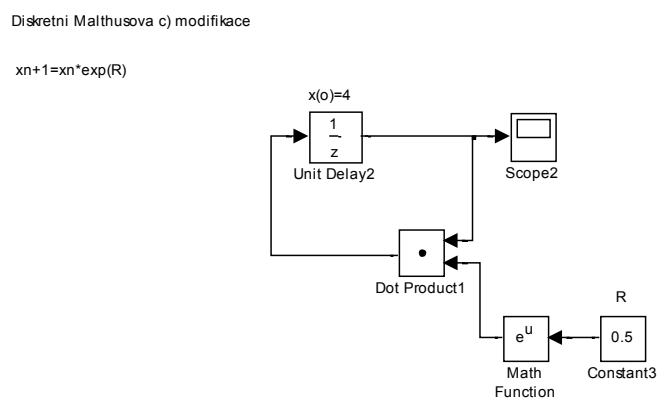


**Obrázek 51** Grafické řešení modelu ve Scilabu

Malthusova rovnice c) modifikace  $x_{n+1} = x_n \cdot \exp(R)$  (97)

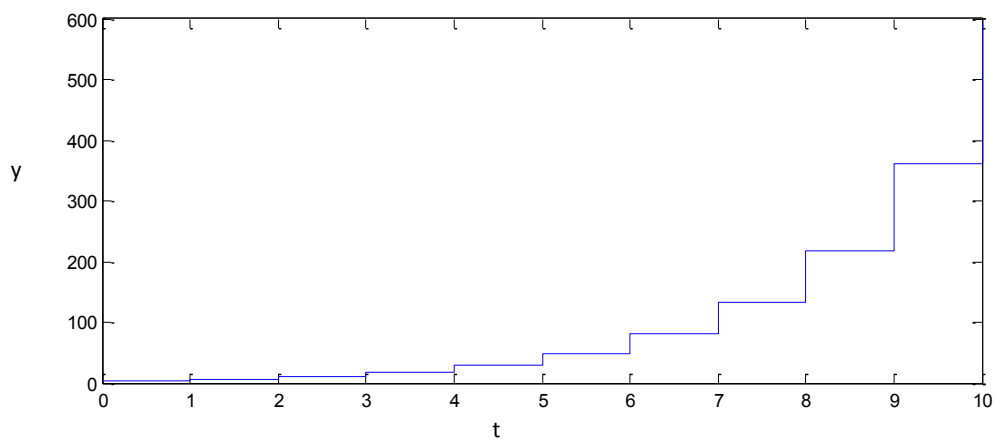
### Řešení v Matlabu:

#### 1) Blokové schéma



**Obrázek 52** Blokové schéma c) modifikace v Matlabu

#### 2) Grafické řešení



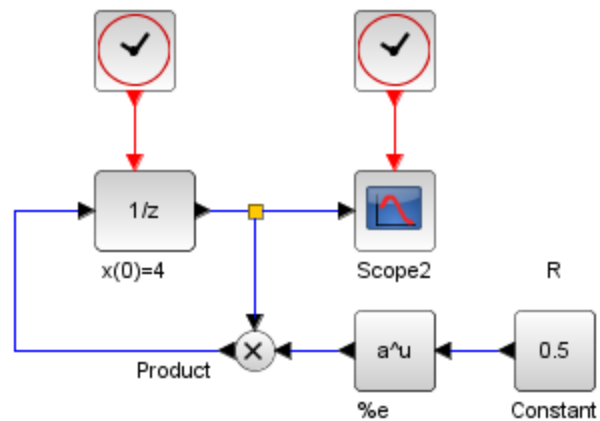
**Obrázek 53** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

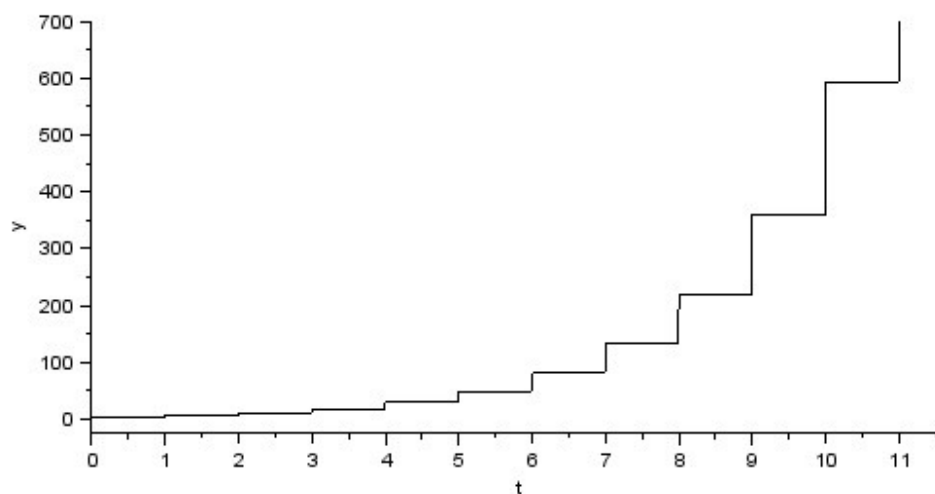
Diskrétní Malthusova c) modifikace

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp(R)$$



Obrázek 54 Blokové schéma c) modifikace ve Scilabu

### 2) Grafické řešení



Obrázek 55 Grafické řešení modelu ve Scilabu



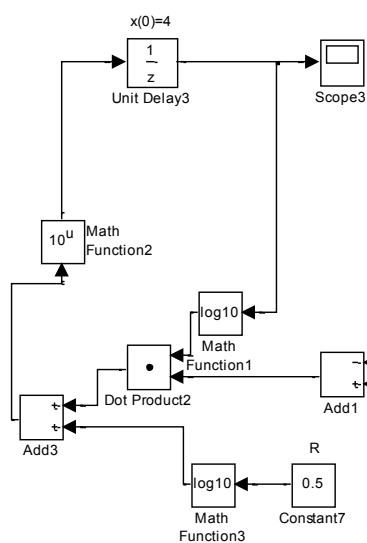
Malthusova rovnice d) modifikace  $x_{n+1} = R \cdot x_n^{1-b}$  (98)

### Řešení v Matlabu:

#### 1) Blokové schéma

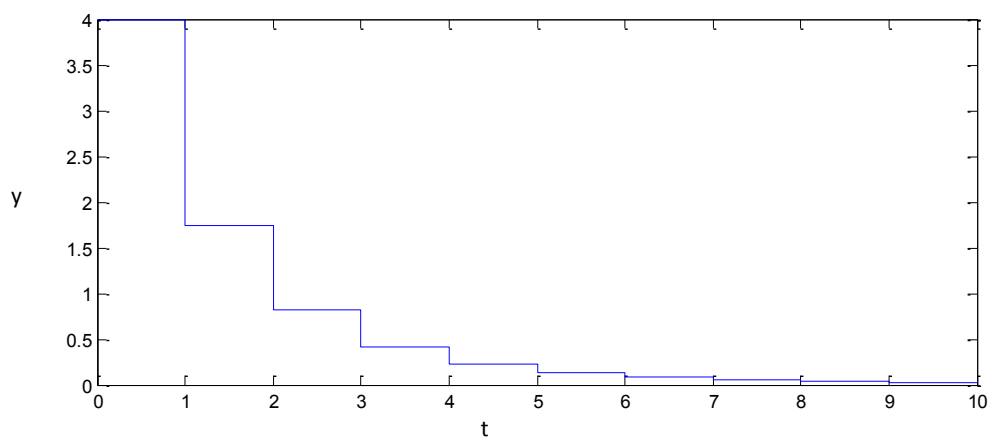
Diskretní Malthusova d) modifikace

$$x_{n+1} = R \cdot x_n^{1-b}$$



Obrázek 56 Blokové schéma d) modifikace v Matlabu

#### 2) Grafické řešení



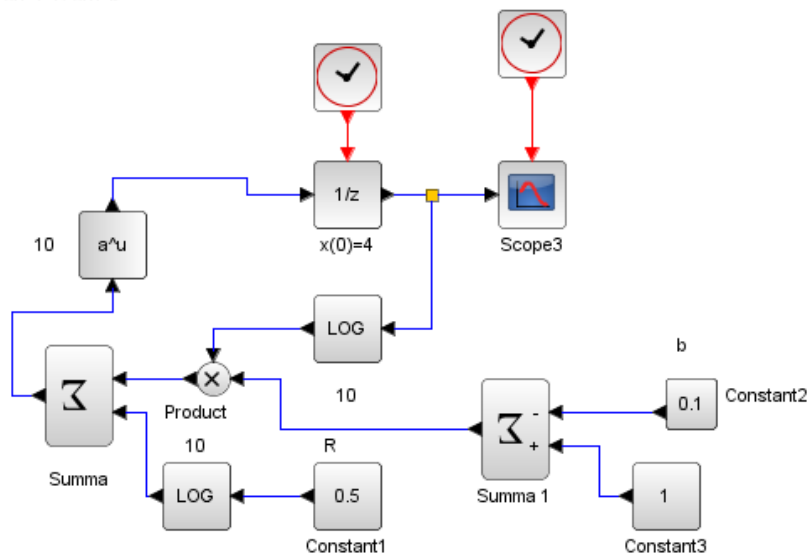
Obrázek 57 Grafické řešení modelu v Matlabu

### Řešení ve Scilabu:

1) Blokové schéma

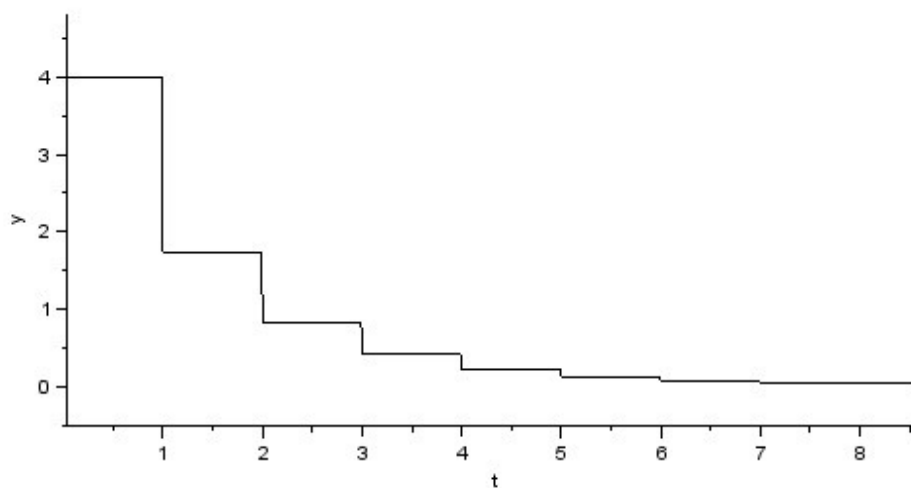
### Diskrétní Malthusuva d) modifikace

$$x_{n+1} = R^* x_n - b$$



**Obrázek 58** Blokové schéma d) modifikace ve Scilabu

## 2) Grafické řešení



**Obrázek 59** Grafické řešení modelu ve Scilabu

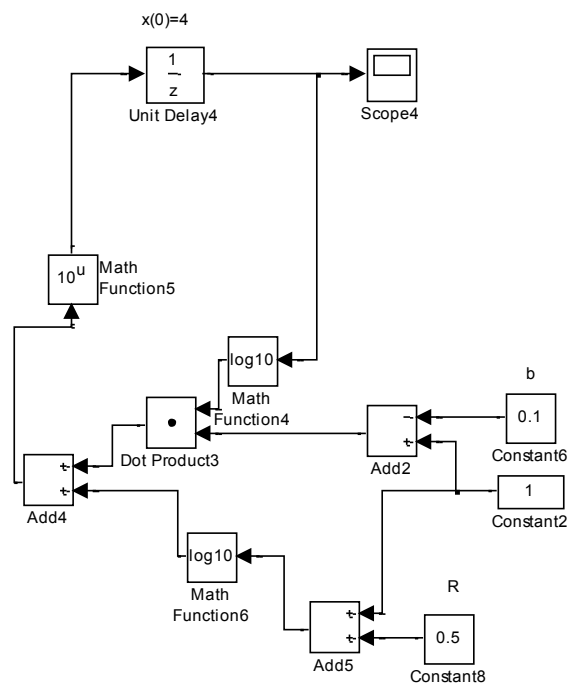
Malthusova rovnice d) s úmrtností  $x_{n+1} = (1 + R) \cdot x_n^{1-b}$  (99)

### Řešení v Matlabu:

#### 1) Blokové schéma

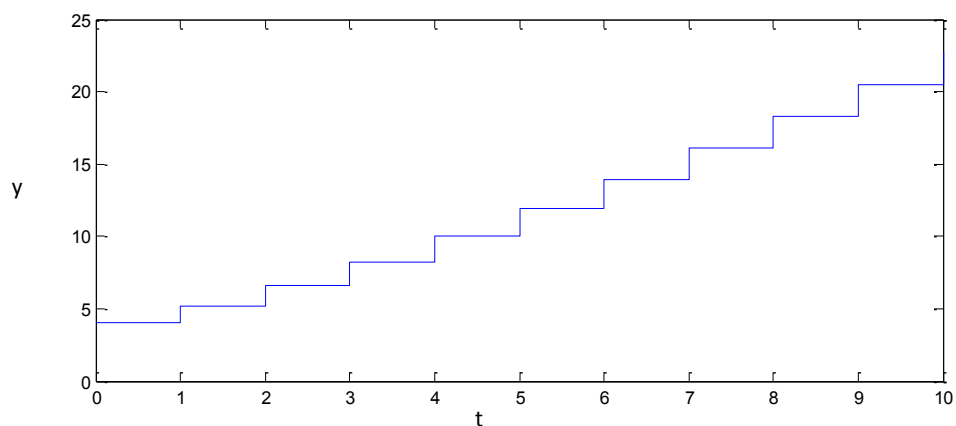
Diskretní Malthusova d) s úmrtností

$$x_{n+1} = (1 + R) \cdot x_n^{1-b}$$



**Obrázek 60** Blokové schéma d) modifikace s úmrtím v Matlabu

## 2) Grafické řešení



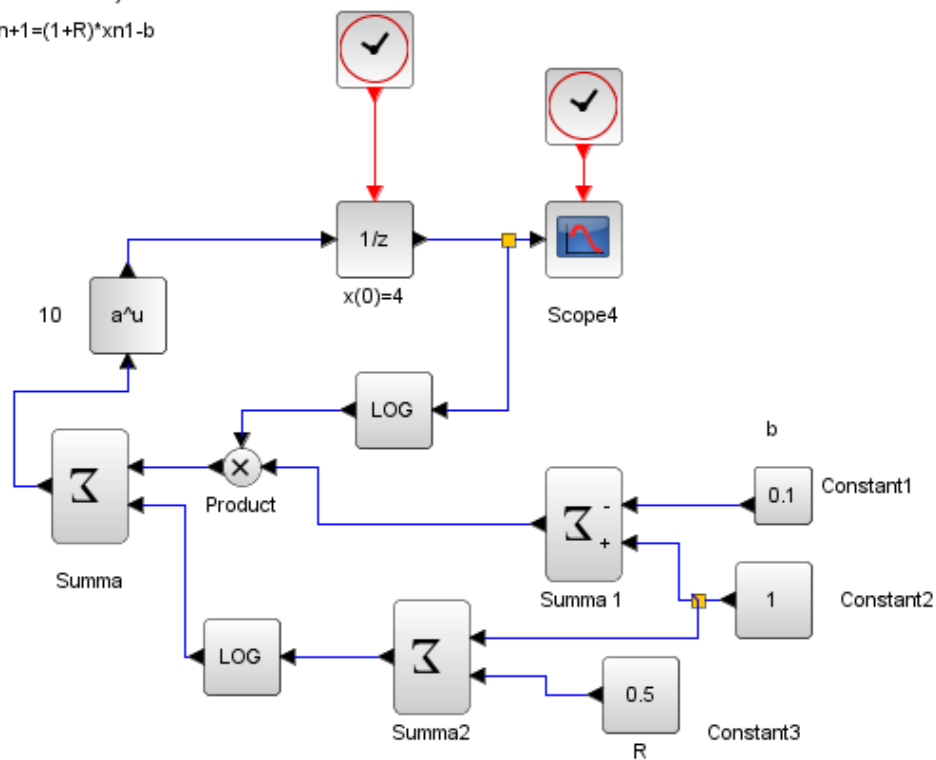
**Obrázek 61** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

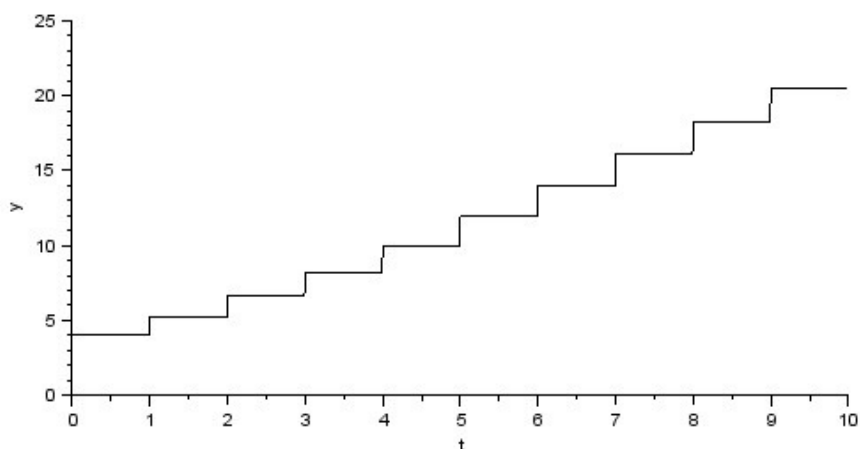
Diskretní Malthusova d) s úmrtností

$$x_{n+1} = (1+R) \cdot x_n - b$$



**Obrázek 62** Blokové schéma d) modifikace s úmrtností ve Scilabu

## 2) Grafické řešení



Obrázek 63 Grafické řešení modelu ve Scilabu

### Analýza diskrétní Malthusovy rovnice s modifikacemi:

Pro řešení platí, že:

$$x_n = R \cdot x_{n-1} = R \cdot R \cdot x_{n-2} = \dots = R^n \cdot x_0, \text{ kde } x_0 \text{ je počáteční podmínka.} \quad (100)$$

Modifikace

$$x_{n+1} - x_n = R \cdot x_n,$$

vede na diferenční rovnici

$$x_{n+1} = x_n + R \cdot x_n = (1 + R) \cdot x_n \quad (101)$$

„V tomto případě stav následující generace je při nulovém přírůstku ( $R = 0$ ) roven stavu předchozí generace.

Naopak při  $R = 0,5$  (jeden potomek na dva rodiče) je nový stav roven jeden a půl násobku stavu předchozí generace.

To odpovídá situaci, kdy do další generace přežívají všichni jednotlivci z generace předcházející a navíc se v ní objevují nově narození jedinci. Tento způsob výpočtu může být vhodný pro modely populací, kdy délka života jejích členů je delší než doba dospívání, kterou reprezentuje vzorkovací krok. „ [1]

Další modifikací je postup odvozený z tvaru řešení diferenciální Malthusovy rovnice, který je  $x(t) = x(0) \cdot \exp(rt)$ . Tomuto vztahu lze pro diskrétní model psát:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp(R) \quad (102)$$

Rozvedeme-li exponenciální výraz do řady:

$$\exp(R) = 1 + \frac{R}{1!} + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \dots \quad (103)$$

a dosadíme řadu zpět do vztahu  $x_{n+1} = x_n \cdot \exp(R)$  dostáváme:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \left( 1 + \frac{R}{1!} + \frac{R^2}{2!} + \frac{R^3}{3!} + \dots \right) \quad (104)$$

„Model bude pracovat správně pro  $R = 0$  a přibližně správně pro malé hodnoty parametru  $R$ . Pro velké hodnoty je však činnost modelu zatížena nelinearitou exponenciální funkce. Tento model je na rozdíl od obou předcházejících variant schopen výpočtu i pro  $R < 0$ , tj. pro modelování stavu vymírajících populací, na druhé straně je takovýto výpočet opět zatížen exponenciální nelinearitou.“ [1]

## 4.8 Diskrétní modely Logistické rovnice

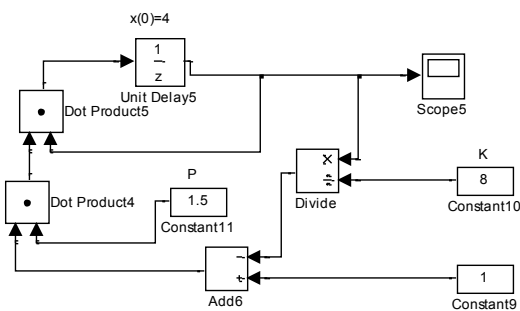
Logistická rovnice a)  $x_{n+1} = P \cdot x_n (1 - x_n / K)$  (105)

Řešení v Matlabu:

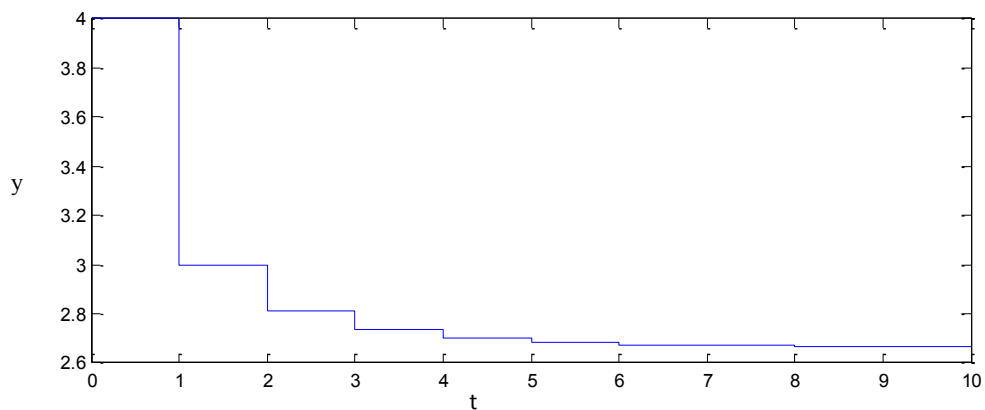
1) Blokové schéma

Diskrétní logistika a)

$x_{n+1} = P \cdot x_n (1 - x_n / K)$



2) Graf **Obrázek 64** Blokové schéma diskrétní logistické rovnice a) v Matlabu



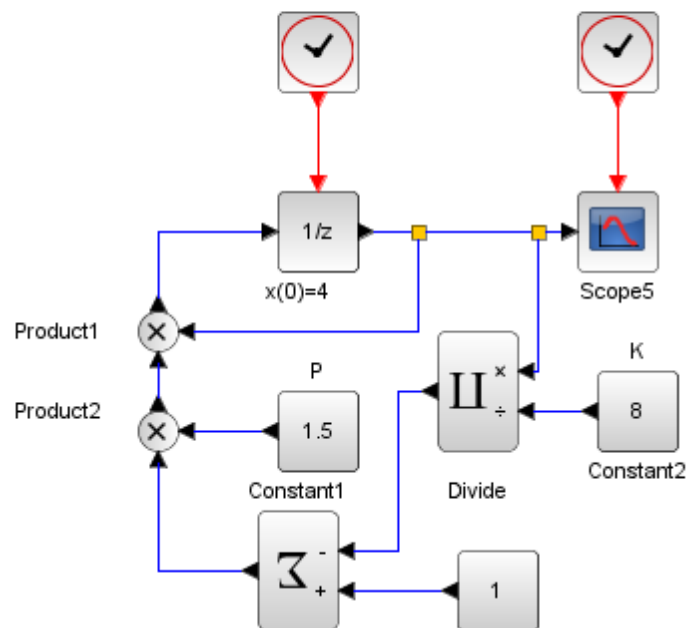
**Obrázek 65** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

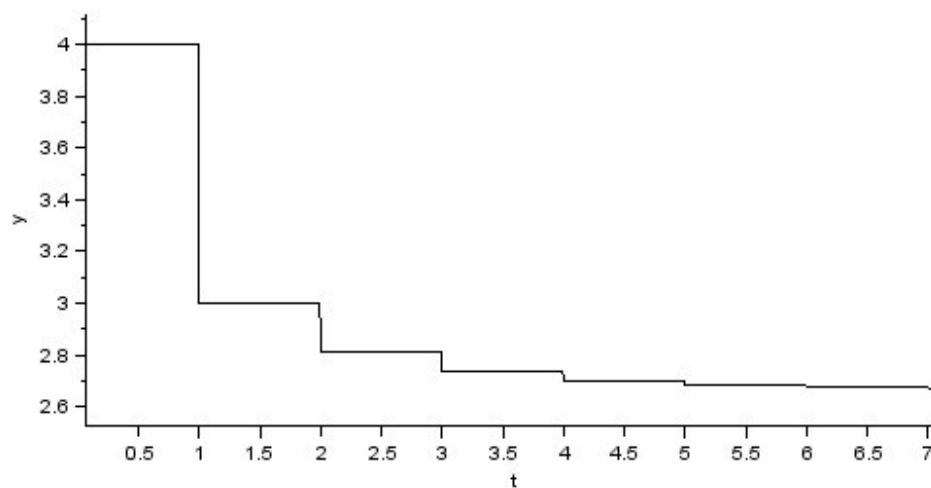
Diskrétní logistická rovnice a)

$$x_{n+1} = P \cdot x_n (1 - x_n / K)$$



**Obrázek 66** Blokové schéma diskrétní logistické rovnice a) ve Scilabu

### 2) Grafické řešení



**Obrázek 67** Grafické řešení modelu ve Scilabu

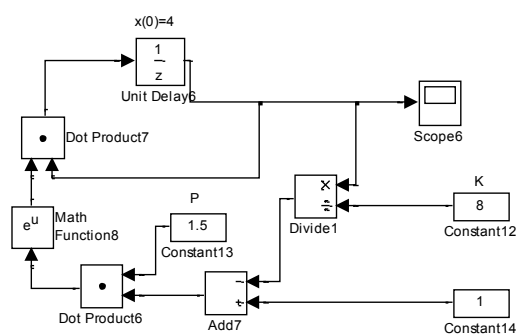


Diskrétní Logistická rovnice b)  $x_{n+1} = x_n \cdot \exp(P(1/x_n / K))$  (106)

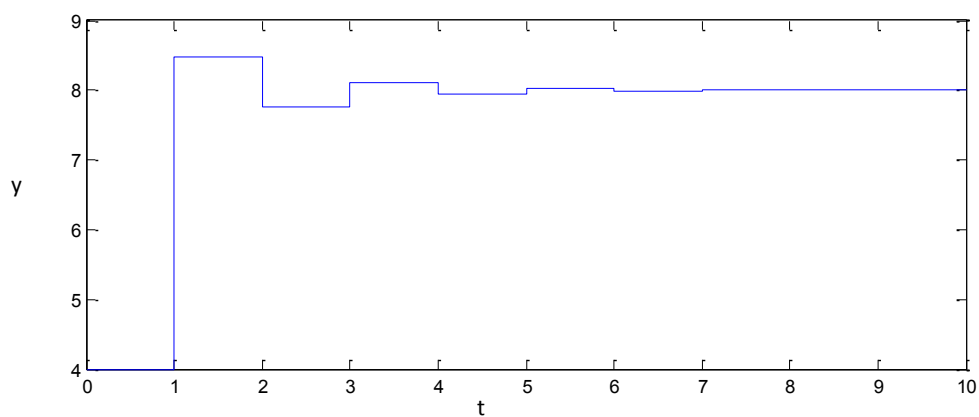
Řešení v Matlabu:

### 1) Blokové schéma

Diskretni Logisticka b)  
 $x_{n+1} = x_n \cdot \exp(P(1/x_n / K))$



### 2) Grafic **Obrázek 68** Blokové schéma diskretní logistické rovnice b) v Matlabu



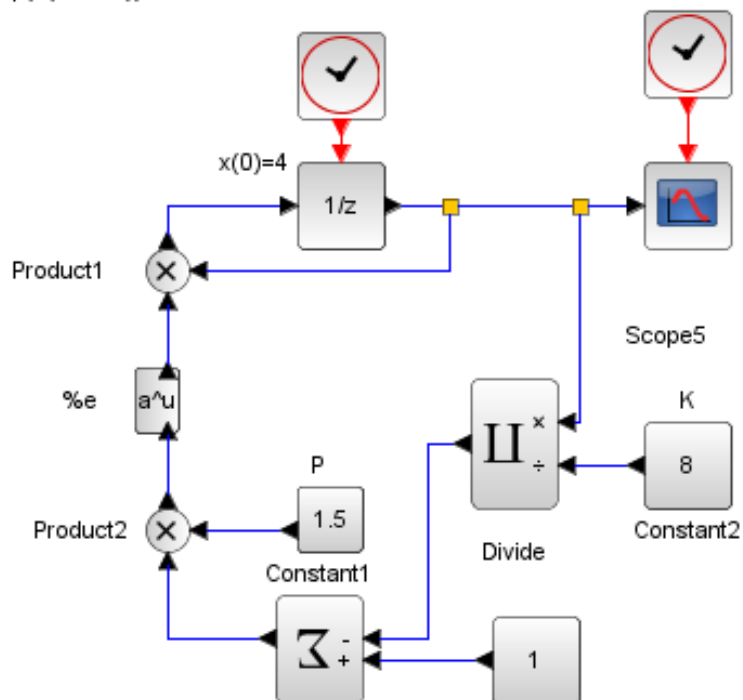
**Obrázek 69** Grafické řešení modelu v Matlabu

## Řešení ve Scilabu:

### 1) Blokové schéma

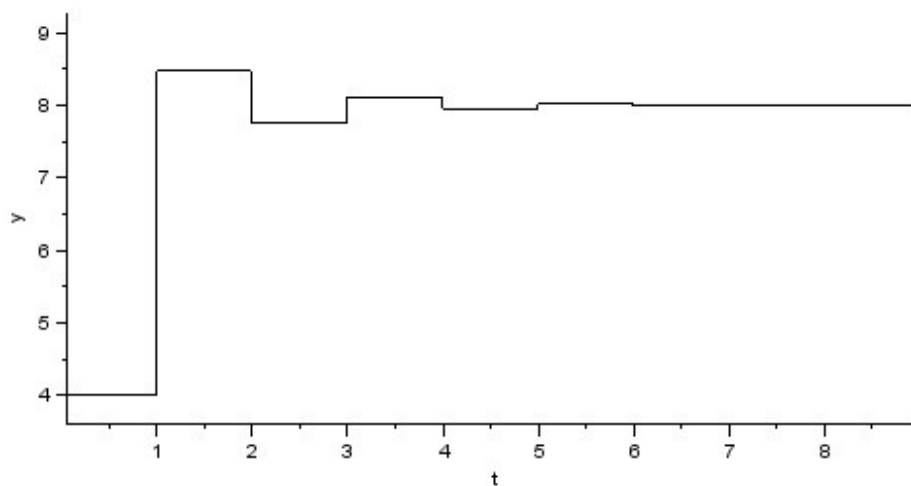
Diskrétní Logistická b)

$$x_{n+1} = x_n \exp(P(1 - x_n/K))$$



**Obrázek 70** Blokové schéma diskretní logistické rovnice b) ve Scilabu

### 2) Grafické řešení



**Obrázek 71** Grafické řešení modelu ve Scilabu

### Analýza diskrétního logistického modelu:

Lineární analýza stability: Model definovaný touto rovnicí:

$$x_{n+1} = x_n \cdot \exp\left(P\left(1 - \frac{x_{n-1}}{K}\right)\right) \quad (107)$$

, má jednodušší verzi, kde  $u_n = x_n/K$  :

$$u_{n+1} = u_n \cdot \exp[P \cdot (1 - u_n)] \quad (108)$$

„Rovnovážné stavy, tj. stavy kdy platí  $u_{n+1} = u_n = u_{n-1}$ , jsou  $u_1^* = 0$  a stav, kdy platí  $1 = \exp[P \cdot (1 - u_{n-1})]$ , tj.  $u_2^* = 1$ . Systém může být v rovnovážných stavech ovlivněn malou poruchou  $v_n$  tak, že platí:  $u_n = u^* + v_n$ , kde  $|v_n| \ll 1$ .“ [1]

$$u_n = u^* + v_n, \text{ kde } |v_n| \ll 1 \quad (109)$$

Pro  $u_1^* = 0$  je  $u_n = 0 + v_n$ , tedy  $u_n = v_n$ , protože  $v_{n-1} \ll 1$ . Pro každou malou výchylku tedy výstup systému roste pro  $P > 0$  exponenciálně, což znamená, že rovnovážný stav je za této podmínky nestabilní.

Situace pro druhý rovnovážný stav  $u_2^* = 1$

$$1 + v_{n+1} = (1 + v_n) \cdot \exp[P \cdot (1 - (1 + v_{n-1}))] = (1 + v_n) \cdot \exp[P \cdot (-v_{n-1})] \quad (110)$$

a po linearizaci je

$$\begin{aligned} 1 + v_{n+1} &\approx (1 + v_n) \cdot (1 - P \cdot v_{n-1}) \\ &\approx (1 + v_n - P \cdot v_{n-1} - P \cdot v_n \cdot v_{n-1}). \end{aligned}$$

To dále znamená, že

$$v_{n+1} - v_n + P \cdot v_{n-1} = 0$$

a také

$$v_{n+2} - v_{n+1} + P \cdot v_n = 0.:$$

[1], [4]

## 5. Závěr a zhodnocení výsledků

Prvním úkolem této práce bylo vytvořit všeobecný přehled modelů jednodruhových a dvoudruhových populací a pochopit principy modelování.

Cílem praktické části bylo vytvoření jednotlivých spojitých a diskrétních modelů ve dvou zvolených simulačních prostředích Matlab & Simulink a Scilab & Xcos. Modely se vytvářely na základě jedné nebo více diferenciálních rovnic. Další částí práce bylo také provést analýzu jednotlivých grafických řešení, určit a analyzovat rovnovážné stavy.

Jedním z hlavních cílů bylo také porovnat výsledky dvou zvolených prostředí. Matlab & Simulink a Scilab & Xcos. Tyto simulační prostředí jsou si velice podobné, přesto se však liší. Scilab na rozdíl od Matlabu je rychlejší, kompatibilnější. Úlohy se provádějí rychleji, rychleji reaguje na změny, které uživatel provádí. Jako je například zapínání a vypínání jednotlivých bloků, či grafických oken. Simulink i Xcos nabízejí víceméně stejné bloky, které se však také liší – například názvem, tvarem ikony nebo nastavením. Některé mají více parametrů, které si může uživatel nastavit, jiné mají méně nebo je najdeme pod jiným názvem a podobně. Zpracování grafů, jejich pojmenování nebo například spojování bloků bylo také podobné. Tady ale Xcos pracoval jinak. Při propojování jednotlivých bloků nešlo vytvořit jen jeden uzel na větvi a z něho pak vést další větve a spojovat tak další bloky. Uzlů se na jedné větvi tedy musí vytvořit několik. S každým spojení se vytvoří uzel. Simulink pracuje tak, že se vytvoří na větvi jeden uzel a z něho vedou další spojení. Je to tedy přehlednější. Simulink má oproti tomu na rozdíl od Xcosu jednu funkci a tou je Autoscale, který vlastně zobrazí graf v daném okně. V Xcosu to provedeme zadáním vhodných proměnných y<sub>min</sub> a Max v nastavení obrazovky (Scope). Rozdíl je také v ukládání výsledných blokových schémat a grafů do textových souborů, jako je například Word. V Simulinku se musí nejdříve graf uložit do workspace, což je tabulka hodnot a poté se musí v hlavním listu (file) zobrazit graf pomocí funkce plot. Pak si jej už můžeme uložit kamkoli. V Xcosu stačí zvolit „Export to“ a sami si vybereme, zda uložíme graf jako obrázek (jpg., png.) nebo zda ho uložíme do schránky a hned jej použijeme. Další podstatný rozdíl je ten, že Matlab je komerční a stojí nemalé peníze, pokud si ho chceme pořídit. Oproti tomu Scilab je volně dostupný ke stažení. Je to tedy lehce získatelný a dobře pracující program, kterým můžeme nahradit Matlab.

## 6. Použitá literatura

- [1] HOLČÍK, Jiří. *Modelování a simulace biologických systémů*. Praha: České vysoké učení technické, 2006. ISBN 80-01-03470-4.
- [2] ECK, Vladimír a Miroslav Razim. *Biokybernetika*. Učební texty ČVUT Praha, fakulta elektrotechniky. Praha : České vysoké učení technické, 1996. ISBN 80-01-01445-2.
- [3] PAZOUREK, Jaroslav. *Simulace biologických systémů*. Praha: Grada Publishing, 1992. 284s. ISBN 80-85623-13-7.
- [4] POTŮČEK, Jiří. *Modelování biologických systémů*. Vyd. 1. V Praze: České vysoké učení technické, 2009. ISBN 80-01-04412-2.
- [5] FARKAS, Miklós. *Dynamical Models in Biology*. San Diego, CA: Academic Press, c2001. 187s. ISBN 978-0-12-249103-0.
- [6] Pecka Lubos. *Modelování dynamiky populací*. [online]. [cit. 2013-04-17]. URL <[http://www.vutbr.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=5603](http://www.vutbr.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=5603)>
- [7] KALAS, Josef, POSPÍŠIL, Zdeněk. *Spojité modely v biologii*. Učební texty. V Brně. 2001. 265 s.
- [8] ŠIROKÝ Milan *Základy práce s programem Simulink*. Učební texty. V Plzni. Západočeská univerzita. 2007. 30s
- [9] *Amensálismus*. [online]. [cit. 2013-04-30]. URL <<http://cs.wikipedia.org/wiki/Amens%C3%A1lismus>>

## 7. Přílohy

- I. Jednodruhové populační modely Matlab
- II. Jednodruhové populační modely Scilab
- III. Dvoudruhové populační modely Matlab
- IV. Dvoudruhové populační modely Scilab

### **Obsah CD:**

Bakalářská práce.pdf

Přílohy